STIRLINGOVA ŠTEVILA 1. VRSTE

Aleks Žigon Tankosič, 8. razred

Raziskovalna naloga

Področje: matematika

Mentorica: Suzana Harej

Osnovna šola Milojke Štrukelj Nova Gorica

Strokovni pregled: prof. dr. Marko Petkovšek

Vogrsko, april 2022

Kazalo

Slike

Uporabljeni matematični simboli

- P_n – število vseh permutacij velikosti n
- S_n – simetrična grupa (množica vseh permutacij velikosti n z operacijo komponiranja oziroma množenja)
- ! – funkcija fakulteta/faktorsko/faktorielna funkcija
- $[n]$ – množica, ki vsebuje vsa naravna števila od 1 do vključno n, ima kardinalnost enako n
- $\lambda : A \longrightarrow A$ – bijekcija množice A same vase
- $|S_n|$ – moč množice vseh permutacij velikosti n
- $\prod$ – produkt
- $f(x), f(n)$ – realna funkcija
- $\forall$ – univerzalni kvantifikator (preberemo: za vsak)
- $\mathbb{N}$ – množica naravnih števil oz. množica pozitivnih celih števil
- $\mathbb{Z}$ – množica celih števil
- $\mathbb{Z}^-$ – množica negativnih celih števil
- $\approx$ – približno
- α^n - potenca
- $\alpha^{\overline{n}}$ ali $x^{(n)}$ – rastoča potenca
- $\alpha^{\underline{n}}$ ali $(x)_n$ – padajoča potenca
- $c(n,k)$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ – Stirlingovo število 1. vrste
- $\wedge$ – konjunkcija (in)
- $\binom{n}{k}$ – binomski simbol (število kombinacij reda k izmed n elementov
- $\sum$ – vsota
- $\bigcup$ – unija
- $\bigcap$ – presek
- $\emptyset$ – prazna množica
- $S(n,k)$, $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ – Stirlingovo število 2. vrste
- $L(n,k)$, $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$ – Lahovo število
- $\delta_{i,j}$ – Kroneckerjeva delta
- ∞ – neskončnost
- $(-\infty)$ – negativna neskončnost
- $s(n,k)$ – predznačeno Stirlingovo število 1. vrste
- $S'(n,k)$ – predznačeno Stirlingovo število 2. vrste
- $l(n,k)$ – predznačeno Lahovo število
- $cl(\lambda)$ – množica voditeljev ciklov permutacije λ
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ – r-Stirlingovo število 1. vrste
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$ – (l,r)-Stirlingovo število 1. vrste

Povzetek

S posedanjem n ljudi za k okroglih miz se pojavi vprašanje, na koliko različnih načinov lahko to storimo. Število možnosti predstavljajo Stirlingova števila 1. vrste. V raziskovalni nalogi predstavim ta števila, njihove rekurzivne zveze, povezave s potencami, primerjave z drugimi kombinatoričnimi števili ter posplošitve Stirlingovih števil 1. vrste. Uporabil sem analitično metodo dela. Pri raziskovalni nalogi sem potrdil tudi svojo hipotezo, ki je predstavljena v uvodu.

Ključne besede:

Permutacija, Stirlingovo število 1. vrste, potence, rastoče potence, posplošitve Stirlingovih števil 1. vrste.

Abstract

When seating n people at k round tables, the question arises as in how many different ways we can do this. The number of possibilities is represented by Stirling numbers of the 1st kind. In my research paper I present these numbers, their recursive relations, connections with powers, I compare them with other combinatorial numbers and generalizations of Stirling numbers of the 1st kind. I used the analytical method of work. In my research paper I also confirmed my hypothesis which is presented in the introduction.

Key words:

Permutation, Stirling number of the 1st kind, powers, rising powers, generalizations of Stirling numbers of the 1st kind.

Zahvala

Najlepša hvala mentorici za nasvete pri pisanju naloge in njen pregled naloge.

Najlepša hvala prof. dr. Marko Petkovšku iz fakultete za matemaiko in fiziko UL za popravke k raziskovalni nalogi, strokoven pregled naloge in nasvete.

Najlepša hvala staršem za podporo in pomoč.

Najlepša hvala mami za lektoriranje naloge.

Poglavje 1

Uvod

Kombinatorika je obsežno področje matematike, ki se ukvarja s konstrukcijo, lastnostmi in številom (praviloma) končnih matematičnih struktur. Kombinatorika se deli na vsaj 16 podpodročij, povezuje pa se še z vsaj petimi drugimi področji matematike in tudi fizike. Stirlingova, Lahova in Bellova števila, ki jih obravnavam v tej nalogi, sodijo v *preštevalno kombinatoriko*, ki preučuje načine preštevanja elementov dane končne množice struktur in lastnosti števil, ki jih pri tem dobimo.

Ko sem reševal naloge iz kombinatorike, sem se spraševal, kaj se zgodi, če bi ljudi posedali za okrogle mize. Je možnosti več ali manj, kot če bi jih posedli na ravno klop? S takšno vrsto nalog sem se seznanil v učbeniku Diskretna matematika 1, ki se uporablja v 2. letniku dodiplomskega študija na Fakulteti za matematiko in fiziko pri predmetu Diskretna matematika 1.

Cilj moje raziskovalne naloge je odgovoriti na vprašanje, na koliko načinov lahko razporedimo n elementov na k krožnic. Če namesto spremenljivk n in k uporabimo naravna števila, dobimo vprašanje, ki je bolj konkretno, torej na koliko načinov lahko posedemo 7 učencev za štiri okrogle mize. Poleg tega je moj cilj odgovoriti še na nasledja vprašanja: kakšne so lastnosti števil, ki ustrezajo problemu razporejanj po krožnicah, kakšne so njihove posplošitve in kakšne so povezave z drugimi kombinatoričnimi števili.

Moja hipoteza je, da je število razporejanj n elementov na k krožnic enako Stirlingovemu številu 1. vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

V drugem poglavju predstavim permutacije, ki so osnova za razumevanje Stirlingovih števil 1. vrste. V tretjem poglavju se poglobim v Stirlingova števila 1. vrste, rekurzivno zvezo, izreke in trditve, ki jim ustrezajo, povezavo z rastočimi in padajočimi potencami ter jih primerjam z ostalimi kombinatoričnimi števili. V četrtem poglavju pišem o matrikah, ki pripadajo tem številom in jih primerjam z ostalimi matrikami. V petem poglavju predstavim predznačena Stirlingova števila 1. vrste in inverzne Stirlingove matrike ter Stirlingova števila 1, vrste pri negativnih argumentih. V šestem poglavju predstavim r-Stirlingova števila 1. vrste in njihove rekurzije ter nazadnje v sedmem (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste ter njihove rekurzije.

V nadaljevanju so pri trditvah in izrekih navedeni dokazi, največkrat po principu kombinatoričnega dokazovanja.

LEGENDA: ■ na koncu vrstice pomeni konec dokaza, ⧫ na koncu vrstice pa pomeni konec zgleda.

Reference

Za raziskovalno nalogo sem uporabil literaturo, ki sem jo poiskal sam in je večinoma v angleščini: znanstvene članke, knjige, prispevke, učbenike, zapiske. V drugem poglavju sem pretežno uporabil knjige [3] , [4] in [8] , prispevek iz učbenika [9] ter prispevek [15] . V tretjem poglavju sem uporabil članke [1] , [12] in [11] , zapiske predavanj [13] in [14] , knjige [4] , [8] , [16] , [19] ter zbirko nalog [7] . V četrtem poglavju sem uporabil članka [2] in [12] . V petem poglavju sem uporabil članek [12] . V šestem poglavju sem uporabil članka [1] in [10] . V sedmem poglavju sem uporabil članka [6] in [20] , v zadnjem poglavju pa članek [5] .

Poglavje 2

Permutacije

Že v stari Grčiji so se matematiki spraševali, na koliko načinov lahko razporedimo n elementov na n mest.

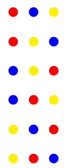
2.1 Uvod v permutacije

DEFINICIJA 2.1 [8, 15] : *Permutacije velikosti* n (iz latinske besede *permutare*, kar pomeni zamenjati) so razvrstitve n različnih elementov neke množice na n prostih mest. Število vseh permutacij velikosti n označimo s P_n.

Zanima nas, kako pri danem n poiskati število P_n. Pri majhnih vrednostih n lahko to storimo grafično.

ZGLED: V vrsti so razporejene 3 raznobarvne kroglice. Na koliko različnih načinov jih lahko premešamo?

Recimo, da so kroglice modre, rdeče in rumene barve. Sistematično lahko narišemo vse možnosti in jih nato preštejemo:



Kroglice lahko tudi označimo z 1, 2, 3:
123
132
231
213
312
321.

Vidimo, da je $P_3 = 6$. ♦

Pri večjih n pa reševanje z risanjem in preštevanjem ni uporabno, saj števila P_n zelo hitro naraščajo (P_{10} je npr. enako $3\,628\,800$). Zato raje izpeljemo formulo za izračun števila P_n pri danem n.

IZREK 2.2: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$

DOKAZ: Prvemu elementu lahko izberemo mesto v razvrstitvi na n načinov. Drugemu elementu priredimo eno izmed preostalih $n-1$ mest na $n-1$ način, tretjemu eno izmed preostalih $n-2$ mest na $n-2$ načina itd., na koncu nam za n-ti element ostane le še eno prosto mesto oziroma ena izbira. Po pravilu produkta lahko torej razvrstitev n elementov na n prostih mest izberemo na $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ načinov. ■

2.2 Permutacije kot bijektivne preslikave

DEFINICIJA 2.2 [3, 8,9, 15] : Permutacija elementov množice A je bijektivna preslikava množice same vase: $\lambda : A \longrightarrow A$.

V preštevalni kombinatoriki pogosto uporabljamo množico prvih n pozitivnih naravnih števil, ki jo na kratko označimo z $[n]$. Za vsako naravno število n je torej $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. [8]

2.2.1 Zapisi permutacij

Vsako permutacijo se da zapisati na različne načine.

Dvovrstična notacija

DEFINICIJA 2.3 [8, 9] : Vsako permutacijo λ se da zapisati v obliki dvovrstične notacije ali tabele tako, da v zgornjo vrstico zapišemo števila od 1 do n, v spodnjo pa slike te preslikave.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \lambda(1) & \lambda(2) & \lambda(3) & ... & \lambda(n) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

ZGLED: Recimo, da imamo permutacijo množice [4]. Denimo, da preslikava λ 1 preslika v 3, 2 preslika v 2, 3 preslika v 4 in 4 v 1. Zapis z dvovrstično notacijo je:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

♦

Ker je pri permutacijah množic, ki so večje od [10], dvovrstična notacija nekoliko zamudna, poznamo tudi enovrstično notacijo.

Enovrstična notacija

DEFINICIJA 2.4 [8, 9] : Vsako permutacijo λ se da zapisati z enovrstično notacijo ali zapisom z zaporedjem, pri čemer naštejemo samo slike te preslikave.

$$\lambda = \lambda(1), \lambda(2), ..., \lambda(n) \tag{2.2}$$

ZGLED: Permutacijo iz prejšnjega zgleda bi lahko zapisali tudi z enovrstično notacijo na sledeči način:

$$\lambda = 3241$$

Pri notaciji vejice izpuščamo. Če sliko števila predstavlja svo ali večmestno število le-tega zapišemo v oklepaj:

$$\lambda = 5284(11)69137(10)(12)$$

kar je ena izmed možnih preslikav množice [12]. [8] ♦

Če je λ permutacija množice $[n]$, lahko rečemo, da je λ permutacija velikosti n. Množico vseh permutacij množice $[n]$ imenujemo *simetrična grupa reda* n in jo označimo s S_n [9] .

Iz izreka 2.2 sledi, da je moč simetrične grupe S_n enaka $n!$: [8]

$$|S_n| = n! \tag{2.3}$$

Še en dogovor za oznake: za poljubno množico A lahko množico vseh permutacij množice označujemo s $S(A)$ [8] .

Zapis permutacije v obliki produkta disjunktnih ciklov

DEFINICIJA 2.5 [8] (postopek cikličnega zapisa permutacije): Naj bo $k \in [n]$. Permutacija $\lambda \in S_n$ je *cikel dolžine* k, če obstaja k različnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_k \in [n]$, tako da je $\lambda(a_i) = a_{i+1}$ za $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $\lambda(a_k) = a_1$ in $\lambda(b) = b$ za vse $b \in [n] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Cikel dolžine k po dogovoru zapišemo v *ciklični obliki* $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$.

Vsako permutacijo $\lambda \in S_n$ lahko zdaj zapišemo v obliki *produkta tujih ciklov.* Izberemo poljuben $i \in [n]$ in tvorimo zaporedje $i, \lambda(i), \lambda^2(i), ...$ Ker vsi členi tega zaporedja pripadajo končni množici $[n]$, se najkasneje po n korakih nek člen ponovi, torej obstajata $j, k \in [n]$, tako da je $j < k$ in $\lambda^j(i) = \lambda^k(i)$. Ker je permutacija λ injektivna preslikava, ki različnima elementoma priredi različni sliki, velja $\lambda^{j-1}(i) = \lambda^{k-1}(i)$, torej tudi $\lambda^{j-2}(i) = \lambda^{k-2}(i)$, $\lambda^{j-3}(i) = \lambda^{k-3}(i)$ itd. vse do $\lambda^0(i) = \lambda^{j-j}(i) = \lambda^{k-j}(i)$ oziroma $i = \lambda^{k-j}(i)$. To pomeni, da je prvi element, ki se v zaporedju $i, \lambda(i), \lambda^2(i), \ldots$ ponovi, kar začetni element i. Tako smo dobili cikel $(i\ \lambda(i)\ \lambda^2(i)\ \cdots\ \lambda^{s-1}(i))$ kot faktor permutacije λ. Če je $s = n$, smo končali, sicer pa izberemo poljuben $j \in [n] \setminus \{i, \lambda(i), \lambda^2(i), \ldots, \lambda^{s-1}(i)\}$ in tvorimo zaporedje $j, \lambda(j), \lambda^2(j), \ldots$, ki nam dá naslednji ciklični faktor permutacije λ. To ponavljamo, dokler ne izčrpamo vseh elementov množice $[n]$. Permutacijo λ zdaj zapišemo kot produkt dobljenih ciklov. Pri tem cikličnih faktorjev dolžine 1 običajno ne pišemo, saj jih lahko vedno rekonstruiramo iz poznavanja preostalih faktorjev in števila n.

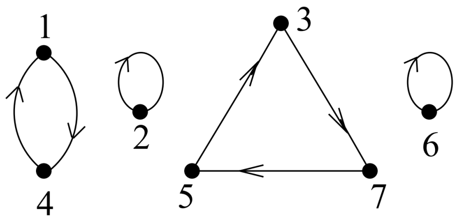
ZGLED: Permutacijo $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$ lahko v obliki produkta tujih ciklov zapišemo npr. kot $\lambda = (1\ 4)(2)(3\ 7\ 5)(6)$ ali tudi kot $\lambda = (1\ 4)(3\ 7\ 5)$ (s pristavkom, da je $\lambda \in S_7$). ♦

2.2.2 Množica nosilcev cikla

DEFINICIJA 2.6 [5] : Naj bo λ permutacija množice $[n]$ z natanko k cikli $c_1, c_2, ..., c_k$. Množico nosilcev cikla označimo s $\mathrm{cl}(\lambda)$ in je množica najmanjših elementov ciklov te permutacije.

$$\mathrm{cl}(\lambda) = \{\min c_1, \min c_2, \ldots, \min c_k\} \tag{2.4}$$

ZGLED: Naj bo n=6 in $\lambda = (13)(245)(6)$. Množica nosilcev ciklov je $\{1, 2, 6\}$. Za prvi cikel te permutacije je nosilec 1, za drugi cikel je 2 in za tretji cikel je 6. ♦



Slika 2.1: Grafični prikaz ciklične permutacije (14)(2)(375)(6)

2.3 Zgledi uporabe permutacij v vsakdanjiku

Pri reševanju nalog iz permutacij velja pravilo komplementa. Recimo, da v nalogi nečesa ne želimo, npr. ne želimo, da niz vsebuje podniz AB. Torej bomo od vseh možnosti brez omejitev odšteli število možnosti, ko naš niz vsebuje podniz AB.

ZGLED 1 [moj zgled] : V sadovnjaku obiramo sadje. Na koliko različnih načinov lahko v vrsto zložimo 4 različna jabolka, 3 različne hruške in 5 različnih marelic, če:

a) vrsta sadja ni pomembna?

Razvrščamo 12 sadežev. Torej imamo na prvem mestu na voljo 12 sadežev, na drugem 11 in tako naprej do možnosti izbire enega sadeža:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

To lahko zapišemo tudi kot:

$$P_{12} = 12! = 479001600$$

Odgovor: Sadje lahko zložimo na 479 001 600 načinov.

b) mora istovrstno sadje biti skupaj?

V tem primeru si predstavljamo, da posamično vrsto sadja zložimo v zaboje. V zabojih lahko sadje razvrščamo (4! načinov za jabolka, 3! za hruške in 5! za marelice). Nato razvrstimo še zaboje na 3! načinov, saj si predstavljamo zaboj kot 1 element. Možnosti je torej:

$$N = 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 103680$$

Odgovor: Ko želimo, da je istovrstno sadje skupaj, imamo 103 680 možnosti za postavitev.

c) istovrstno sadje ne sme biti skupaj?

V tem primeru od vseh možnosti (12!) odštejemo neugodne možnosti za ta primer, torej možnosti iz prejšnjega primera. S tem upoštevamo pravilo komplementa.

$$N = 12! - 4! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3! = 478897920$$

Odgovor: Ko želimo, da istovrstno sadje ni zloženo skupaj, imamo 478 897 920 možnosti.

č) morajo biti na začetku jabolka, nato hruške in nazadnje marelice?

Sadje postavimo v zaboje, zabojev pa ne smemo razvrščati, torej imamo enako število možnosti kot v primeru b), le da ne množimo s 3!.

$$N = 4! \cdot 3! \cdot 5! = 17280$$

Odgovor: Ko želimo, da so na začetku jabolka, nato hruške in nazadnje marelice, je možnosti za postavitev 17 280.

d) morajo hruške stati skupaj?

Hruške postavimo v zaboj, ostalega sadja pa ne. Hruške lahko razvrstimo na 3! načinov v zaboju, ostalo sadje pa razvrščamo vključno z zabojem, v katerem so hruške. Ta zaboj upoštevamo kot 1 element, torej imamo poleg ostalih 9 sadežev še 1 element, ki ga moramo razvrstiti.

$$N = 3! \cdot 10! = 21772800$$

Odgovor: Ko želimo, da so hruške zložene skupaj, imamo 21 772 800 možnosti.

e) morajo jabolka biti na začetku vrste?

Jabolka postavimo v zaboj, zaboj pa postavimo na začetek in ga ne premikamo. Jabolka v zaboju lahko razvrstimo na 4!, ostalo sadje pa na 8! načinov.

$$N = 4! \cdot 8! = 967680$$

Odgovor: Možnosti za razvrščanje z jabolki na začetku vrste je 967 680. ⧫

ZGLED 2 [moj zgled] : Iz števk 0, 1, 4, 5 sestavljamo nova štirimestna števila tako, da vsako števko uporabimo natanko enkrat. Koliko je vseh štirimestnih števil, če:

a) dovolimo tudi neprava števila?

Neprava števila so tista, ki imajo na prvem mestu števko 0. V tem primeru je možnosti:

$$P_4 = 4! = 24$$

Odgovor: Ko na prvem mestu dovolimo tudi neprava števila, lahko iz množice števk sestavimo 24 števil.

b) zahtevamo prava štirimestna števila?

Ko zahtevamo prava števila, pomeni, da števke 0 ne želimo na prvem mestu. Tedaj imamo $3 \cdot 3!$ možnosti za razvrščanje števk.

$$3 \cdot P_3 = 3 \cdot 3! = 18$$

Odgovor: Ko zahtevamo prava štirimestna števila, imamo 18 možnosti za razvrščanje.

c) zahtevamo liha prava štirimestna števila?

Če morajo biti števila liha, pomeni, da imamo na zadnjem mestu 2 možnosti. Ker smo eno števko že postavili, imamo na prvem mestu 2 možnosti (število 0 ne sme biti na prvem mestu), na drugem 2 možnosti in na zadnjem le še 1 možnost.

$$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

Odgovor: Ko želimo razvrščati tako, da dobimo liha števila, imamo le 8 možnosti.

č) zahtevamo prava štirimestna števila, večja od 4000?

Če morajo biti števila večja od 4000, pomeni, da imamo na prvem mestu na izbiro le 2 ugodni števki: 4 in 5. Na drugem mestu imamo 3 možnosti, ker smo eno števko že izbrali, na tretjem mestu imamo 2 možnosti in na zadnjem le še 1 možnost.

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

Odgovor: Ko želimo, da so števila večja od 4000, imamo 12 možnosti za razvrščanje danih števk.

d) zahtevamo prava štirimestna števila, manjša od 1500?

Ker sestavljamo prava štirimestna števila, manjša od 1500, je lahko na prvem mestu le števka 1, na drugem pa 0 ali 4. Na tretjem in četrtem mestu sta potem preostali dve števki v enem ali drugem vrstnem redu, torej je število vseh takih števil enako $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ (ta števila so 1045, 1054, 1405 in 1450). ⧫

ZGLED 3 [moj zgled] : Iz niza črk besede LOGARITEM sestavljamo nove nize tako, da vsako črko uporabimo natanko enkrat. Koliko nizov lahko sestavimo, če:

a) ni dodatnih omejitev?

Brez omejitev imamo 9! možnosti za premetavanje vseh črk v besedi LOGARITEM:

$$P_9 = 9! = 362880$$

Odgovor: Črke besede LOGARITEM lahko razvrstimo na 362 880 načinov.

b) se mora niz začeti z L?

Če se mora naš niz začeti s črko L, pomeni, da imamo le 8! možnosti za razvrščanje preostalih črk.

$$P_8 = 8! = 40320$$

Odgovor: Ko želimo črko L na prvem mestu, imamo 40 320 možnosti za sestavljanje nizov.

c) morajo biti samoglasniki na začetku niza?

Če morajo biti samoglasniki na začetku niza, imamo 4! možnosti za razvrščanje samoglasnikov, nato pa še 5! možnosti za premetavanje soglasnikov oziroma ostalih črk.

$$N = 4! \cdot 5! = 2880$$

Odgovor: Ko želimo, da na začetku niza stojijo samoglasniki, imamo 2 880 možnosti za razvrščanje.

č) morajo samoglasniki biti skupaj?

V tem primeru zahtevamo, da so samoglasniki skupaj. Razvrščamo samoglasnike 0, A, I, E in soglasnike L, G, R, T, M. Samoglasnike lahko razvrščamo na 4! načinov. Zamislimo si, da imamo samoglasnike napisane na listkih in jih postavimo v škatlico. Nato vključno s soglasniki razvrščamoo škatlico s samoglasniki, torej je možnosti

$$N = 4! \cdot 6! = 17280$$

Odgovor: Ko želimo, da so samoglasniki skupaj, imamo za razvrščanje 17 280 možnosti.

d) se morajo nizi začeti z nizom RITEM?

Če se morajo nizi začeti z nizom RITEM, pomeni, da imamo na prvih petih mestih le eno možnost, nato pa še 4! možnosti za premetavanje ostalih črk. S črticami si lahko pomagamo tako:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

To lahko zapišemo kot:

$$P_4 = 4! = 24$$

Odgovor: Možnosti za razvrščanje, ko se naši nizi začnejo z nizom RITEM, je 24.
e) se nizi ne smejo začeti z nizom RITEM?
Uporabim pravilo komplementa in od vseh možnosti odštejem možnosti iz prejšnjega primera.

$$N = 9! - 4! = 362856$$

Odgovor: Ko se nizi ne smejo začeti z nizom RITEM, imamo za razvrščanje 362 856 možnosti.
f) morajo nizi vsebovati niz LOGAR?
V tem primeru bomo razvrščali niz LOGAR ter črke I, T, E in M. Niz LOGAR vzamemo kot 1 element. Tedaj imamo 5! možnosti, saj imamo 5 elementov, ki jih bomo premetavali na preostalih mestih.

$$P_5 = 5! = 120$$

Odgovor: Ko morajo naši nizi vsebovati niz LOGAR, imamo 120 možnosti za razvrščanje.
g) morajo samoglasniki biti med soglasniki?
V tem primeru z razmislekom preštevamo ugodne možnosti razvrstitve ustreznih črk na posamezno mesto v nizu:

$$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

To zapišemo kot:

$$N = 5! \cdot 4! = 2880$$

Odgovor: Ko samoglasniki stojijo med soglasniki, je možnosti za razvrščanje natanko 2880. ♦

Poglavje 3

Stirlingova, Lahova in Bellova števila

Uvodoma podajam zgodovinski pregled znanstvenikov, ki so prispevali k razvoju in uporabi Stirlingovih števil 1. vrste:

• James Stirling (11. 5. 1692 - 5. 12. 1770) je leta 1730 v svojem delu Methodus Differentialis prvič omenil Stirlingova števila 1. vrste,

• Masanobu Saka je leta 1782 predstavil kombinatorično interpretacijo Stirlingovih števil 1. vrste,

• Leopold Kronecker (1823 - 1891) je vpeljal simbol, imenovan Kroneckerjeva delta, ta simbol ima zanimive povezave s Stirlingovimi števili 1. vrste,

• Ivo Lah (1896 - 1979), slovenski matematik, je vpeljal Lahova števila in predstavil povezave s Stirlingovimi števili 1. vrste,

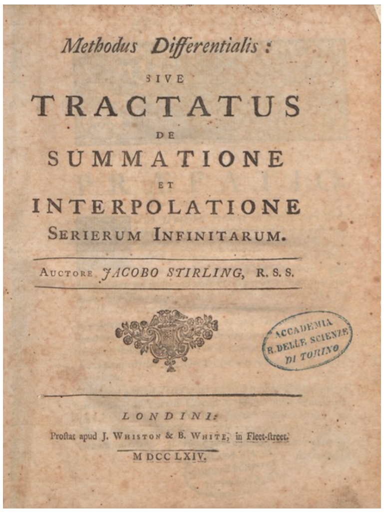
• Jovan Karamata (1902 - 1967) je simbol v oglatem oklepaju za Stirlingova števila 1. vrste vpeljal leta 1935 v članku Theorèmes sur la sommabilité exponentielle,

• Donald Knuth (1938) je vpeljal Stirlingova števila 1. vrste z negativnimi argumenti,

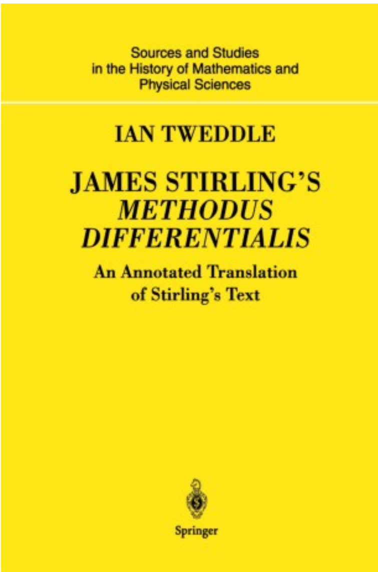
• Andrei Z. Broder (1953) je leta 1982 odkril r-Stirlingova števila 1. vrste,

• Hacene Belbachir in Yahia Djemmada sta konec januarja 2021 odkrila (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste.

Slika 3.1: James Stirling (1692 - 1770)



Slika 3.2: James Stirling: Methodus Differentialis, izdaja iz leta 1764



Slika 3.3: Angleški prevod Stirlingovega najbolj znanega dela, objavljen leta 2003

3.1 Razporejanje elementov po krožnici

Koliko različnih možnosti imamo, da razporedimo n učencev okoli ene okrogle mize? Pri tem štejemo dve razporeditvi za enaki, če ima vsak učenec v obeh razporeditveh istega desnega soseda.

Možen razmislek:

Najprej razporedimo učence v ravno vrsto, kar gre na $n!$ načinov, nato jih v dobljenem vrstnem redu posedemo za mizo. Če nastalo razporeditev zavrtimo za 0 ali 1 ali ... ali $n-1$ sedežev, se desni sosedje ne spremenijo, torej je teh n razporeditev med seboj enakih. Število različnih razporeditev n učencev okoli okrogle mize je torej enako $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

3.2 Šest definicij Stirlingovih števil 1. vrste

Stirlingova števila 1. vrste lahko definiramo na več načinov:

DEFINICIJA 3.1 [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 19, 20] : Stirlingova števila 1. vrste so:

- števila permutacij velikosti n s k cikli,
- števila permutacij množice $[n]$ s k cikli,
- koeficienti v razvoju rastočih potenc po navadnih (James Stirling je najprej raziskoval prav te koeficiente),
- števila razporeditev n elementov na k krožnic (velikokrat privzamemo, da so elementi ljudje, krožnice pa okrogle mize, okoli katerih razvrščamo ljudi).
- števila razdelitev množice $[n]$ na k ciklično urejenih blokov.
- vsote vseh produktov $n-k$ elementov množice $[n-1]$. (glej razdelek druga interpretacija iz teorije števil)

Stirlingova števila 1. vrste označujemo na več načinov. Po najnovejši literaturi se označujejo kot $c(n,k)$, po starejši literaturi pa kot $s(n,k)$. Pri notacijah je treba paziti, saj lahko pride do nesporazuma. Po novem so $s(n,k)$ predznačena Stirlingova števila 1. vrste, zato je za nepredznačena Stirlingova števila 1. vrste uporabljena pisava $c(n,k)$.

V prejšnjem stoletju sta srbski matematik Jovan Karamata in ameriški matematik Donald Knuth predlagala zapis Stirlingovih števil 1. vrste z oglatimi oklepaji:

$$c(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

V nadaljevanju bom uporabljal Karamata - Knuthov zapis.

3.2.1 Primer izračuna Stirlingovega števila 1. vrste

Oglejmo si zgled izračuna Stirlingovega števila 1. vrste.

ZGLED 1: Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ta zapis predstavlja število vseh permutacij velikosti 4 oz. množice [4] z natanko dvema cikloma.

REŠITEV:

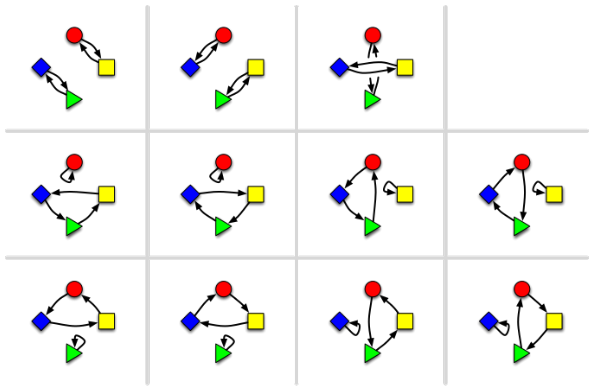
Poiščem permutacije velikosti 4, ki so produkt natanko dveh ciklov.

Pri reševanju teh nalog uporabimo ciklični zapis možnih permutacij. V našem primeru poiščemo vse možne permutacije velikosti 4 z dvema cikloma. Obstajajo 3 permutacije z dvema cikloma velikosti 2: (12)(34), (13)(24), (14)(23). Obstaja pa še 8 permutacij velikosti 4 z dvema cikloma, pri čemer je prvi cikel velikosti tri, drugi cikel pa velikosti ena: (124)(3), (142)(3), (134)(2), (143)(2), (234)(1), (243)(1), (123)(4), (132)(4). Možnosti seštejemo: 8+3 = 11, torej je $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$. [8] ♦

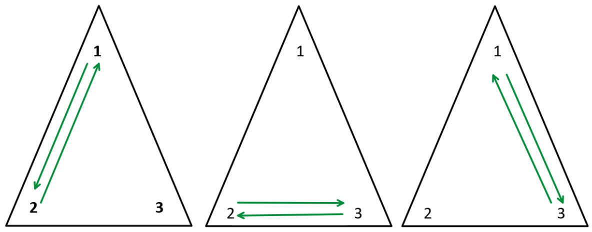
Izračun Stirlingovega števila 1. vrste $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ si lahko predstavljamo kot primer iz vsakdanjika. Zanima nas, na koliko možnih načinov lahko 4 učence posedemo okrog 2 okroglih miz. Učence označimo s števili od 1 do 4. Imamo sledeče možnosti:

- za prvo mizo sedita učenca 1 in 2, za drugo pa učenca 3 in 4,
- za prvo mizo sedita učenca 1 in 3, za drugo pa učenca 2 in 4,
- za prvo mizo sedita učenca 1 in 4, za drugo pa učenca 2 in 3,
- za prvo mizo sedijo učenci 1, 2 in 4, za drugo pa učenec 3,
- za prvo mizo sedijo učenci 1, 4 in 2, za drugo pa učenec 3,
- za prvo mizo sedijo učenci 1, 3 in 4, za drugo pa učenec 2,
- za prvo mizo sedijo učenci 1, 4 in 3, za drugo pa učenec 2,
- za prvo mizo sedijo učenci 2, 3 in 4, za drugo pa učenec 1,
- za prvo mizo sedijo učenci 2, 4 in 3, za drugo pa učenec 1,
- za prvo mizo sedijo učenci 1, 2 in 3, za drugo pa učenec 1,
- za prvo mizo sedijo učenci 1, 3 in 2, za drugo pa učenec 1.

Vseh možnosti razporeditve je 11 (gl. sliko 3.4).



Slika 3.4: Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$



Slika 3.5: Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

PRIPOMBA. Pri grafičnem prikazu ciklične strukture permutacije velikosti n bomo števila $1, 2, \ldots, n$ vselej postavili v oglišča pravilnega n-kotnika.

ZGLED 2: Oglejmo si še primer, ko je $n = 3$.

Izračun $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sprašuje po številu permutacij velikosti 3 oziroma množice [3] z natanko 2 cikloma. Obstajajo 3 permutacije velikosti 3 z dvema cikloma, pri čemer je en cikel velikosti 2, drugi pa velikosti 1: (12)(3), (23)(1), (13)(2). Iz tega sledi $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$.

⧫

3.2.2 Pomembne trditve o Stirlingovih številih 1. vrste

O Stirlingovih številih 1. vrste veljajo naslednje trditve:

TRDITEV 3.2 [4, 8, 12, 13] :
1. Permutacija velikosti n ne more biti produkt več kot n tujih ciklov, zato velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, k > n \quad \wedge \quad k < 0 \tag{3.1}$$

2. Če je število ciklov enako velikosti permutacije, imamo samo 1 možnost razporeditve.

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \tag{3.2}$$

Edina permutacija velikosti n z n cikli je identiteta, torej je število takšnih permutacij enako 1.
3. Permutacija velikosti n z enim ciklom je cikel dolžine n, teh pa je $(n-1)!$ (glej prvi razdelek tega poglavja).

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \tag{3.3}$$

4. Permutacija velikosti n z $n-1$ cikli ima natanko en cikel dolžine 2, ostali so dolžine 1. Takšnih permutacij je torej toliko, na kolikor načinov lahko izmed n elementov izberemo dva, ki bosta v ciklu dolžine 2. To pa gre na $\binom{n}{2}$ načinov (glej definicijo 3.10), torej je:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} \tag{3.4}$$

Veljata pa še naslednji trditvi:
5.Število permutacij dolžine n, ki imajo $n-2$ cikla je enako:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3} \tag{3.5}$$

6. Število permutacij dolžine n, ki imajo $n-3$ cikle, je enako

$$\begin{bmatrix} n \\ n-3 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}\binom{n}{4} \tag{3.6}$$

ZGLED [moj zgled] : Oglejmo si nekaj primerov uporabe trditve 3.2.
1.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 0$$

2.

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} = 1$$

3.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = (4-1)! = 3! = 6$$

3.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4-1 \end{bmatrix} = \binom{4}{2} = 6$$

4.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(3 \cdot 4 - 1)\binom{4}{3} = \frac{1}{4} \cdot 11 \cdot 4 = 1 \cdot 11 = 11$$

5.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5-3 \end{bmatrix} = \binom{5}{2}\binom{5}{4} = 10 \cdot 5 = 50$$

♦

3.3 Rastoče in padajoče potence

Razlikujemo več različnih vrst potenc.

3.3.1 Navadne potence

Navadne potence, kot jih že vsi poznamo, so zaporedno množenje nekega števila. Število x je pri naslednji definiciji osnova, število n pa eksponent.

DEFINICIJA 3.3 [4, 8] : Navadne potence, ki jih že vsi poznamo, so produkti enakih faktorjev. Pri potenci x^n je število x osnova, število n pa eksponent. Njeno vrednost izračunamo po formuli

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n} \tag{3.7}$$

ZGLED: Izračunajmo, koliko je 3^8.

REŠITEV: $3^8 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 6561$. ♦

3.3.2 Rastoče potence

DEFINICIJA 3.4 [4, 8] : Vrednost rastoče potence $x^{\overline{n}}$ je produkt n faktorjev, katerih prvi je x, vsak naslednji pa je za 1 večji od prejšnjega:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= x \cdot (x+1) \times (x+2) \cdot \dots \cdot (x+n-1) & (3.8)\\ &= \prod_{k=1}^{n} (x+k-1) = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k). & (3.9) \end{aligned}$$

ZGLED [moj zgled] : Izračunajmo $6^{\overline{4}}$ in $5^{\overline{2}}$.

REŠITEV:

$$\begin{aligned} 6^{\overline{4}} &= 6(6+1)(6+2)(6+3) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024 \\ 5^{\overline{2}} &= 5(5+1) = 5 \cdot 6 = 30 \end{aligned}$$

♦

Za rastočo potenco $x^{\overline{n}}$ najdemo na različnih področjih matematike še druge oznake, npr. Pochhammerjev simbol $(x)_n$.

3.3.3 Padajoče potence

DEFINICIJA 3.5 [4, 8, 16, 19] : Vrednost padajoče potence $x^{\underline{n}}$ je produkt n faktorjev, katerih prvi je x, vsak naslednji pa je za 1 manjši od prejšnjega:

$$\begin{aligned} x^{\underline{n}} &= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-n+1) & (3.10)\\ &= \prod_{k=1}^{n} (x-k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k). & (3.11) \end{aligned}$$

ZGLED [moj zgled] : Izračunajmo $6^{\underline{4}}$ in $5^{\underline{2}}$.

REŠITEV:

$$\begin{aligned} 6^{\underline{4}} &= 6(6-1)(6-2)(6-3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \\ 5^{\underline{2}} &= 5(5-1) = 5 \cdot 4 = 20 \end{aligned}$$

♦

3.3.4 Število 0 v povezavi s potencami in fakultetami

Raziskal sem nekaj zanimivih trditev, kaj se zgodi, če v katerokoli potenco oziroma fakulteto vstavimo 0. Najbolj me je očarala trditev, ki sledi.

TRDITEV 3.6: [4, 8, 12] : $0! = 1$

DOKAZ (iz prevedbe enačbe 3.3): Vemo, da je $n!$ enako $n \cdot (n-1)!$. Če vstavimo namesto števila n število 1, dobimo, da je $1!$ enaka $1 \cdot 0!$. Od tod sledi, da je $0!$ enako 1. ■.

Za potence velja: [8, 12] :

a) $0^0 = 1$ in prav tako tudi $x^0 = 1$

b) $0^{\overline{0}} = 1$ in prav tako tudi $x^{\overline{0}} = 1$

c) $0^{\underline{0}} = 1$in prav tako tudi $x^{\underline{0}} = 1$.

OPOMBA: V prejšnjih enačbah gre za privzete vrednosti, ki maksimalno razširijo veljavnost nekaterih pomembnih oziroma koristnih formul in izrekov.

POSLEDICA: Ker so Stirlingova števila 1. vrste tudi koeficienti med rastočimi in navadnimi potencami, iz trditve 3.7 sledi, da je:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \tag{3.12}$$

zaradi česar smo prejšnje trditve tudi potrebovali.

3.3.5 Padajoče in rastoče potence kot polinomi

Polinomi so funkcije, ki jih lahko zapišemo v obliki vsote produktov številskih koeficientov s potencami neodvisne spremenljivke. Kvadratna funkcija je denimo polinom 2. stopnje. [4, 17]

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.13}$$

V kombinatoriki so najpreprostejša zaporedja tista, pri katerih lahko n-ti člen podamo v obliki nekega polinoma spremenljivke n. Pri zapisu bom sedaj namesto spremenljivke x uporabljaj spremenljivko α, saj bo potenciranje tako bolj razvidno.

$$1 = 1 \tag{3.14}$$

$$\alpha = \alpha \tag{3.15}$$

$$\alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha \tag{3.16}$$

$$\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha \tag{3.17}$$

$$\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) = \alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha \tag{3.18}$$

$$\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4) = \alpha^5 + 10\alpha^4 + 35\alpha^3 + 50\alpha^2 + 24\alpha \tag{3.19}$$

V razvoju padajoče potence po navadnih potencah dobimo koeficiente z enakimi absolutnimi vrednostmi kot pri razvoju rastoče potence z istim eksponentom, le da njihovi predznaki alternirajo:

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4) = \alpha^5 - 10\alpha^4 + 35\alpha^3 - 50\alpha^2 + 24\alpha \tag{3.20}$$

[8, 12]

Koeficiente, ki so Stirlingova števila 1. vrste dobimo na enak način kot v sledečem zgledu:

ZGLED [moj zgled] :

$$\begin{array}{rl} \alpha^{\overline{4}} & = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) = \\ & = (\alpha^2+\alpha)(\alpha^2+5\alpha+6) \\ & \qquad = \alpha^4 + \alpha^3 \\ + & \qquad\qquad 5\alpha^3 + 5\alpha^2 \\ + & \qquad\qquad\qquad 6\alpha^2 + 6\alpha \\ \hline \alpha^{\overline{4}} = & \qquad \alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha \end{array}$$

Koeficienti v teh polinomih so ravno Stirlingova števila 1. vrste. Te polinome občasno imenujemo tudi Stirlingovi polinomi 1. vrste. Stirlingove polinome 1. vrste lahko zapišemo tudi s pomočjo Stirlingovih matrik 1. vrste. Več o njih v 4. poglavju.

3.4 Nekatera sorodna kombinatorična števila

3.4.1 Stirlingova števila 2. vrste

DEFINICIJA 3.7 [4, 8] : Stirlingovo število 2. vrste je število vseh razdelitev množice $[n]$ na k nepraznih, paroma tujih, neurejenih množic $B_1, B_2, \ldots, B_k$, imenovanih *bloki*, katerih unija je A.

Stirlingova števila 2. vrste so ravno tako poimenovana po Jamesu Stirlingu in jih označimo s $S(n, k)$ oziroma po Karamata - Knuthovem zapisu:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Očitno velja

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2} \tag{3.21}$$

DOKAZ: Da je $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$, že vemo. Pri razdelitvi množice $[n]$ na $n-1$ blokov ima eden od blokov dva elementa, vsi ostali pa po enega. Blok moči 2 lahko izberemo na $\binom{n}{2}$ načinov, torej je tudi $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}$. [4, 8] ■

3.4.2 Lahova števila

DEFINICIJA 3.8 [4, 8] : Lahova števila so števila vseh razdelitev množice $[n]$ na k nepraznih linearno urejenih blokov. Označimo jih z $L(n, k)$ oziroma v Karamata – Knuthovem zapisu z

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor \tag{3.22}$$

Definiral jih je Ivo Lah leta 1954.

Zanimiva je povezava med Stirlingovimi števili obeh vrst in Lahovimi števili:

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

Za vse $n, k \in \mathbb{N}$ velja:

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \leq \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor \text{ [9]} \tag{3.24}$$

3.4.3 Kombinacije

DEFINICIJA 3.9 [4, 8] : Kombinacije so neurejeni izbori, ki preštevajo število podmnožic množice $[n]$ z močjo k.

Označimo jih s C_n^k oziroma z binomskim simbolom:

$$\binom{n}{k} \tag{3.25}$$

Kombinacije računamo po formuli: [4, 8]

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \tag{3.26}$$

3.4.4 Bellova števila

DEFINICIJA 3.10 [4, 8] : Bellovo število je število vseh neurejenih razdelitev množice $[n]$ in je definirano s sledečo vsoto:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Bellova števila se imenujejo po matematiku Ericu Templu Bellu (1883 - 1960).

Lahko bi rekli, da so Bellova števila za Stirlingova števila 2. vrste kot fakultete za Stirlingova števila 1. vrste (glej razdelek Tabela Stirlingovih števil 1. vrste).

Definicijo Bellovih števil bomo potrebovali v petem poglavju.

3.5 Izrek in rekurzivna zveza za Stirlingova števila 1. vrste

V tem razdelku bom predstavil zanimiv izrek, ki povezuje rastoče potence in navadne potence ter ga primerjal z ostalimi kombinatoričnimi števili. Na enak način bom predstavil še rekurzivno zvezo.

3.5.1 Rekurzivna zveza za Stirlingova števila 1. vrste

TRDITEV 3.11 [4, 8] : Za vsaka n in k velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

DOKAZ [4, 8] : Permutacije množice $[n]$ s k cikli razdelimo na 2 razreda oz. na 2 skupini: tiste, v katerih je n v ciklu dolžine 1, in tiste, v katerih je n v ciklu dolžine vsaj 2. Če je element n v svojem ciklu in ga odstranimo, dobimo permutacijo množice $[n-1]$ s $k-1$ cikli. To pomeni, da je število permutacij v prvem razredu enako $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$. Če je n v ciklu dolžine vsaj 2 in ga izbrišemo, dobimo permutacijo množice $[n-1]$ s k cikli, ki jih je $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$. Vendar pa brisanje števila n iz permutacij drugega razreda ni bijektivna preslikava: za $n=7$ in $k=3$ denimo dobimo isto permutacijo $(164)(23)(5)$ iz permutacij

$$(1764)(23)(5), (1674)(23)(5), (1647)(23)(5), (164)(273)(5), (164)(237)(5), (164)(23)(57)$$

Hitro lahko opazimo, da permutacijo množice $[n-1]$ s k cikli dobimo iz natanko $n-1$ permutacij množice $[n]$ s k cikli, saj lahko n vstavimo za katerokoli od $n-1$ števil v permutaciji. To dokazuje, da je število permutacij v drugem razredu enako $(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$. ■

ZGLED [moj zgled] : Oglejmo si primera uporabe druge rekurzije, s pomočjo katere za začetek izračunajmo, koliko je

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Po rekurziji bo:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (4-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 3 \times 3 = 2 + 9 = 11$$

Za drugi zgled izračunajmo, koliko je

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Po rekurziji bo

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + (5-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 11 + 4 \times 6 = 35$$

♦

Primerjava rekurzivnih zvez med kombinatoričnimi števili

1. **Stirlingova števila 1. vrste**

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \qquad [8] \tag{3.29}$$

2. **Stirlingova števila 2. vrste**

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \qquad [8] \tag{3.30}$$

3. **Lahova števila**

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = \left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor + (n-1+k)\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor \qquad [8] \tag{3.31}$$

4. **Kombinacije**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad [8] \tag{3.32}$$

3.5.2 Stirlingov izrek 1. vrste

Stirlingov izrek 1. vrste imenujemo tudi izrek o zapisu rastočih potenc z navadnimi potencami.

IZREK 3.12 [8] : Velja:

$$\alpha^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k \tag{3.33}$$

DOKAZ: (z indukcijo) [9] : Uporabimo indukcijo po n. Za $n=0$ sta obe strani enaki 1. Predpostavimo, da trditev velja za $n-1$. Potem je

$$\alpha^{\overline{n}} = \alpha^{\overline{n-1}} \times (\alpha + n - 1) = (\sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \alpha^k) \times (\alpha + n - 1) = \tag{3.34}$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \alpha^{k+1} + (n-1) \sum_k c(n-1,k)\alpha^k =$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \alpha^k + \sum_k (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \alpha^k =$$

$$= \sum_k (\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \alpha^k + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \alpha^k =$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k$$

in s tem je indukcija končana. ■

OPOMBA pri dokazu: Indukcija (oz. popolna indukcija) je način dokazovanja izrekov, trditev, itd. v matematiki za množico $\mathbb{N}$. Za popolno indukcijo sta značilna dva koraka, in sicer:

1. Trditev (ali izrek) najprej dokažemo za število $n = 1$. Če trditev za število 1 ne velja, je trditev napačna in jo ovržemo. Če pa trditev za število 1 velja, nadaljujemo z naslednjim korakom.

2. Sedaj želimo, da dana trditev velja še za vse ostale primere. To preverimo v dveh korakih: najprej predpostavimo, da trditev velja za naravno število n, nato pa s pomočjo te predpostavke dokažemo, da velja tudi za število $n + 1$

Tako smo trditev s pomočjo popolne indukcije dokazali. [18]

ZGLED [moj zgled] : Za uporabo te trditve glej razdelek 4.6 (interpretacija iz teorije števil). ♦

Primerjava z ostalimi kombinatoričnimi števili

1. Stirlingova števila 1. vrste

$$\alpha^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k \qquad [9] \tag{3.35}$$

2. Stirlingova števila 2. vrste

$$\alpha^{n} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \alpha^{\underline{k}} \qquad [9] \tag{3.36}$$

3. Lahova števila

$$\alpha^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor \alpha^{\underline{k}} \qquad [9] \tag{3.37}$$

3.6 Tabela vrednosti Stirlingovih števil 1. vrste

S pomočjo vseh izrekov in trditev lahko skonstruiramo tabelo Stirlingovih števil 1. vrste. [4, 8, 12]

$n \| k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	0
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

3.6.1 Izrek o vsoti vrednosti Stirlingovih števil

IZREK 3.13 [8] : *Velja:*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! \tag{3.38}$$

DOKAZ [8] : Stirlingovo število 1. vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ je število vseh permutacij velikosti n z natanko k cikli, torej je vsota $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ enaka številu vseh permutacij velikosti n, to pa je, kot vemo, ravno $n!$. ■

3.7 Dve interpretaciji Stirlingovih števil 1. vrste iz teorije števil

Poleg kombinatorične interpretacije Stirlingovih števil 1. vrste poznamo interpretacijo iz teorije števil. Najprej bom predstavil prvo.

3.7.1 Prva interpretacija

DEFINICIJA 3.14 [12] : Stirlingovo število 1. vrste lahko dobimo tudi tako, da potenciramo α^n, nato pa poiščemo k-ti člen potence. Koeficient k-tega člena je Stirlingovo število 1. vrste.

ZGLED [moj zgled] : Izračunajmo $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ Najprej potenciramo α na rastočo potenco 5:

$$\alpha^{\overline{5}} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4) = 24\alpha + 50\alpha^2 + 35\alpha^3 + 10\alpha^2 + \alpha$$

Poiščemo drugi člen polinoma. Vidimo lahko, da ima ta člen koeficient 50 in tudi $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ je 50. Ta interpretacija izhaja iz Stirlingovega izreka za Stirlingova števila 1. vrste. ♦

3.7.2 Druga interpretacija

DEFINICIJA 3.15 [12] : Stirlingovo število 1. vrste je vsota vseh produktov $n-k$ elementov množice $[n-1]$.

ZGLED [moj zgled] : Izračunajmo Stirlingova števila $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$ po drugi teoretično - številski interpretaciji.

- $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ = (uporabljali bomo množico $[4-1] = [3]$ kot tudi v vseh naslednjih zgledih) $= 1 \times 2 \times 3 = 6$ (izračunamo produkt, pa čeprav ne vsebuje člena vsote).
- $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11$
- $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$
- $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 50$ ♦

OPOMBA [12] : Prvo interpretacijo bi lahko uporabili tudi kot dokaz druge.

3.8 Stirlingova števila 1. vrste v povezavi s Kroneckerjevo delto

DEFINICIJA 3.16 [12] : Kroneckerjeva delta je funkcija dveh spremenljivk i, j, ki je enaka 1, če sta spremenljivki enaki, in enaka 0, če sta spremenljivki različni.

Simbol se imenuje po Leopoldu Kroneckerju (1823 - 1891), ki ga je vpeljal leta 1866.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases} \tag{3.39}$$

ZGLED [moj zgled] :

$$\delta_{6,6} = 1$$

$$\delta_{6,7} = 0$$

♦

Sedaj pa si oglejmo povezavi s Stirlingovimi števili 1. vrste.

TREDITEV 3.17 [12] :Velja:

$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = \delta_{n,0} \tag{3.40}$$

Da to drži, se lahko hitro prepričamo z vrednostmi v tabeli. Iz te trditve izhaja tudi trditev, da je $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0$.

ZGLED [moj zlged] : Izračunajmo $\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$. Ker $6 \neq 0$, je rezultat enak 0. ♦

Poglavje 4

Stirlingove matrike

Stirlingova števila 1. vrste lahko definiramo tudi kot matriko, pri kateri s pomočjo dveh stolpcev zapišemo rastoče produkte.

4.1 Stirlingova matrika 1. vrste in njena definicija

DEFINICIJA 4.1 [12] : Stirlingova matrika 1. vrste predstavlja potenciranje rastočih potenc.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 273 & 225 & 85 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1764 & 1624 & 753 & 175 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{2} \\ \alpha^{3} \\ \alpha^{4} \\ \alpha^{5} \\ \alpha^{6} \\ \alpha^{7} \\ \alpha^{8} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Stirlingova matrika je druga matrika izmed treh v tej enačbi. Vidimo lahko, da ima vrednosti Stirlingovega števila 1. vrste. Stirlingovo število 1. vrste pa lahko najdemo po prvi številsko - teoretični interpretaciji in sicer tako, da pogledamo vrstico prve matrike, kjer se eksponent rastoče potence sklada z izbranim n, ter poiščemo v drugi matriki k-ti element po vrsti v zaporednem n-tem stolpcu (začnemo šteti z 0). Tako najdemo Stirlingovo število 1. vrste.

ZGLED[moj zgled] : $\alpha^{\overline{5}} = 0 \times 1 + 24 \times \alpha + 50 \times \alpha^2 + 35 \times \alpha^3 + 10 \times \alpha^4 + 1 \times \alpha^5$.

Če zapis uredimo, dobimo $\alpha^{\overline{5}} = 24\alpha + 50\alpha^2 + 35\alpha^3 + 10\alpha^4 + \alpha^5$. ♦

4.2 Primerjava Stirlingove matrike 1. vrste s Pascalovo matriko

DEFINICIJA 4.2 [2, 12] : Pascalova matrika daje koeficiente potenciranja $\alpha + 1$ na poljubno, v tem primeru, navadno potenco.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ (\alpha+1)^2 \\ (\alpha+1)^3 \\ (\alpha+1)^4 \\ (\alpha+1)^5 \\ (\alpha+1)^6 \\ (\alpha+1)^7 \\ (\alpha+1)^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{2} \\ \alpha^{3} \\ \alpha^{4} \\ \alpha^{5} \\ \alpha^{6} \\ \alpha^{7} \\ \alpha^{8} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Vidimo lahko, da se v 2. martiki prejšnje enačbe skriva Pascalov trikotnik in vrednosti binomskih koeficientov, ki jih dobimo na enak način kot Stirlingova števila 1. vrste v njihovi matriki.

ZGLED [moj zgled] : Potencirajmo $(\alpha + 1)^4$.

$$(\alpha+1)^4 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha^2 + 4 \cdot \alpha^3 + 1 \cdot \alpha^4$$

Če zapis uredimo, dobimo

$$(\alpha+1)^4 = 1 + 4\alpha + 6\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4.$$

♦

4.3 Primerjava Stirlingove matrike 1. vrste s Stirlingovo matriko 2. vrste

O tem, kako sta Stirlingova matrika 1. vrste in Stirlingova matrika 2. vrste povezani, bom predstavil v naslednjem poglavju.

DEFINICIJA 4.3 [12] : Stirlingova matrika 2. vrste je:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

ZGLED [moj zgled] : Za zgled potencirajmo α^5. Po matriki bo to:

$$\alpha^5 = 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha^{\underline{1}} + 15 \cdot \alpha^{\underline{2}} + 25 \cdot \alpha^{\underline{3}} + 10 \cdot \alpha^{\underline{4}} + 1 \cdot \alpha^{\underline{5}}$$

Če zapis uredimo, dobimo:

$$\alpha^5 = \alpha + \alpha^{\underline{1}} + 15\alpha^{\underline{2}} + 25\alpha^{\underline{3}} + 10\alpha^{\underline{4}} + \alpha^{\underline{5}}$$

♦

4.4 Primerjava Stirlingove matrike 1. vrste z Lahovo matriko

DEFINICIJA 4.4 [12] : Lahova matrika je:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 36 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 240 & 120 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1800 & 1200 & 300 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5040 & 15120 & 12600 & 4200 & 630 & 42 & 1 & 0 \\ 0 & 40320 & 141120 & 141120 & 58800 & 1176 & 1176 & 56 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

ZGLED [moj zgled] : Potencirajmo $\alpha^{\overline{5}}$ preko rastočih potenc.

$$\alpha^{\overline{5}} = 0 \cdot 1 + 120 \cdot 240\alpha^{\underline{3}} + 120 \cdot 20\alpha^{\underline{4}} + 1 \cdot \alpha^{\underline{5}}$$

Če zapis uredimo, dobimo:

$$\alpha^{\overline{5}} = 120\alpha^{\underline{1}} + 240\alpha^{\underline{2}} + 120\alpha^{\underline{3}} + 20\alpha^{\underline{4}} + \alpha^{\underline{5}}$$

♦

Poglavje 5

Predznačena Stirlingova števila 1. vrste

Vrednosti predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste najdemo v inverzni Stirlingovi matriki 1. vrste. Znano je, da so nekatere vrednosti negativne. Tudi ta števila je odkril James Stirling, ko se je spraševal, kakšne vrednosti dobimo, ko zapišemo inverzno Stirlingovo matirko.

5.1 Definicija predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste

DEFINICIJA 5.1 [12] : Predznačeno Stirlingovo število 1. vrste je:

$$s(n,k) = (-1)^{n \pm k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Predznačeno Stirlingovo število 1. vrste označimo s $s(n,k)$. Zapisa s Karamatovo notacijo ne uporabljamo. Lahko dokažemo, zakaj lahko predznačena Stirlingova števila definiramo na 2 načina. Ko število -1 potenciramo na seštevek/odštevek dveh enakih števil, dobimo isto število: sodo ali liho.

Očitno je, da velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = |s(n,k)| \tag{5.2}$$

[12]

5.2 Inverzne Stirlingove matrike 1. vrste

Če iz Stirlingove matrike 1. vrste izpeljemo inverzno Stirlingovo matriko, dobimo: [9, 14]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 273 & 225 & 85 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1764 & 1624 & 753 & 175 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix} \longrightarrow \tag{5.3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -15 & 25 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 31 & -90 & 65 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -63 & 301 & -350 & 140 & -21 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 127 & -966 & 1701 & -1050 & 266 & -28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

in se lahko hitro prepričamo, da vrednosti ustrezajo definiciji predznačenih Stirlingovih števil 2. vrste, definiranih kot:

$$-1^{(n\pm k)} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{5.5}$$

5.3 Primarjava z drugimi inverznimi matrikami

5.3.1 Primerjava inverzne Stirlingove matrike 1. vrste z inverzno Stirlingovo matriko 2. vrste

DEFINICIJA 5.2 [12] : V inverzni Stirlingovi matriki 2. vrste dobimo enake vrednosti kot pri Stirlingovi matriki 1. vrste, le da so nekatere vrednosti negativne. Vrednosti so negativne po diagonalah.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 273 & -225 & 85 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & -1764 & 1624 & -753 & 175 & -21 & 1 & 0 \\ 0 & -5040 & -13068 & -13132 & 6769 & -1960 & 322 & -28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{2} \\ \alpha^{3} \\ \alpha^{4} \\ \alpha^{5} \\ \alpha^{6} \\ \alpha^{7} \\ \alpha^{8} \end{pmatrix} \longrightarrow \tag{5.6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{2} \\ \alpha^{3} \\ \alpha^{4} \\ \alpha^{5} \\ \alpha^{6} \\ \alpha^{7} \\ \alpha^{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix}$$

Dobljeno matriko imenujemo Stirlingova matrika 2. vrste in v njej najdemo vrednosti števil $\left\{ {n \atop k} \right\}$. [12]

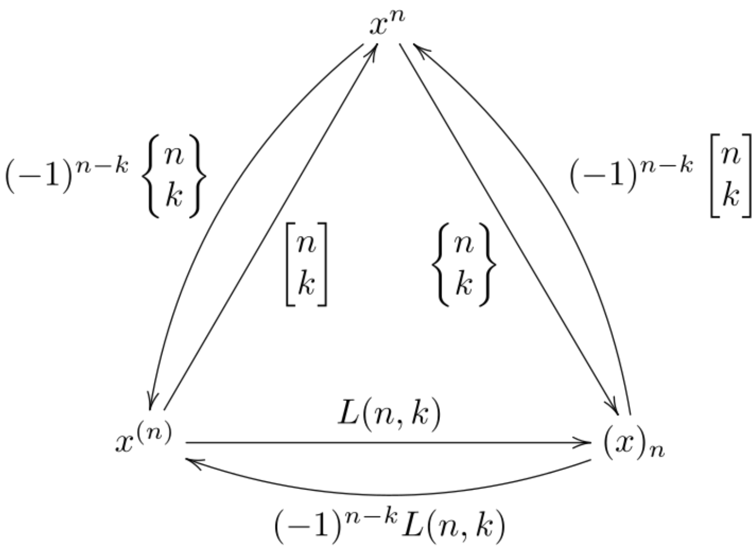
Prvotna matrika pa je matrika predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste.

5.3.2 Primerjava inverzne Stirlingove matrike 1. vrste z inverzno Lahovo matriko

Vrednosti v inverzni Lahovi matriki so vrednosti predznačenih Lahovih števil $(-1)^n \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$. [12]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 36 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 240 & 120 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1800 & 1200 & 300 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5040 & 15120 & 12600 & 4200 & 630 & 42 & 1 & 0 \\ 0 & 40320 & 141120 & 141120 & 58800 & 1176 & 1176 & 56 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix} \longrightarrow \tag{5.7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 36 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & -240 & -120 & -20 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1800 & 1200 & 300 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5040 & -15120 & -12600 & -4200 & -630 & -42 & -1 & 0 \\ 0 & 40320 & 141120 & 141120 & 58800 & 1176 & 1176 & 56 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$



Slika 5.1: Povezava kombinatoričnih števil.

5.4 Inverz Stirlingovega zreka 1. vrste

Preko inverzne Stirlingove matrike 1. vrste lahko pridemo do sledeče trditve:

IZREK 5.3 [8] : Če α zamenjamo z $-\alpha$ in namesto Stirlingovega števila 1. vrste vstavimo predznačeno Stirlingovo število 1. vrste, dobimo:

$$\alpha^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k \tag{5.9}$$

DOKAZ: Izrek izhaja iz inverznih Stirlingovih matrik. ■

5.5 Grafični prikaz kombinatoričnih in predznačenih kombinatoričnih števil

Preko inverznih matrik in matrik lahko ugotovimo presenetljivo povezavo med različnimi zapisi potenc, ki jo ponazarjajo različna kombinatorična števila. Povezavo predstavlja slika 5.1. Namesto $(-1)^{n+/-k}\left[{n \atop k}\right]$ bi lahko uporabljali simbol $s(n,k)$, namesto simbola $(-1)^{n+/-k}\left\{{n \atop k}\right\}$ bi lahko uporabljali simbol $S'(n,k)$, namesto simbola $L(n,k)$ bi lahko uporabljali simbol $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ in namesto simbola $(-1)^n L(n,k)$ bi lahko uporabljali simbol $l(n,k)$.

5.6 Stirlingova števila 1. vrste z negativnimi argumenti

V tem poglavju bom predstavil nekaj osupljivih dejstev o računanju Stirlingovih števil z negativnimi celimi števili. Naj dodam, da se negativna cela števila v Stirlingovem številu lahko nahajajo le, ko sta n in k negativni števili, ali ko je n negativno celo število, k pa pozitino celo število. V preštevalni kombinatoriki nikoli ne uporabimo kombinacije, ko je n pozitivno celo število, k pa negativno celo število [4] .

S Stirlingovimi števili 1. vrste z negativnimi vrednostmi se je ukvarjal matematik Donald Knuth.

5.6.1 Definicija in računanje Stirlingovega števila 1. vrste z negativnimi argumenti

5.6.1.1 $n, k \in \mathbb{Z}^-$

DEFINICIJA 5.3 [1] :Stirlingovo število 1. vrste, ko sta n in k negativni celi števili, se izračuna kot:

$$\left[{-k \atop -n}\right] = \left\{{n \atop k}\right\} \tag{5.10}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

Ko pa želimo izračunati

$$\begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix}$$

si pomagamo s sledečo formulo:

$$\begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix},$$

pri čemer še vedno velja, da mora biti $k \leq n$, da bo rezultat večji od 0.

S pomočjo prejšnje definicije lahko skonstruiramo tabelo za Stirlingovo število 1. vrste, ko sta n in k negativni celi števili. [1]

$n \vert k$	-1	-2	-3	- 4	-5
-1	1	1	1	1	1
-2	0	1	3	7	15
-3	0	0	1	6	25
-4	0	0	0	1	10
-5	0	0	0	0	1

Naj dodam, da mora biti n po absolutni vrednosti manjši od k, če želimo dobiti vrednost večjo od 0.

ZGLED [moj zgled] : Izračunajmo Stirlingovi števili:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Po definiciji 6.1. bo torej:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Dobimo rezultata 0 in 350 (vrednost lahko dobimo v Stirlingovi matriki 2. vrste). ♦

5.6.1.2 $n \in \mathbb{Z}^-, k \in \mathbb{N}$

TRDITEV 5.4 [1] : Za izračun velja naslednja trditev:

$$\begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^k} \binom{n}{i} \tag{5.12}$$

ZGLED [1] : Sedaj pa si oglejmo zgled uporabe rekurzivne zveze. Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{120}(5 - \frac{10}{2^3} + \frac{10}{3^3} - \frac{5}{4^3} + \frac{1}{5^3}) = \frac{1}{120}(5 - \frac{10}{8} + \frac{10}{27} - \frac{5}{64} + \frac{1}{125}) \tag{5.13}$$

Ko izračunamo vrednost izraza, dobimo

$$\frac{874863}{25920000}. \tag{5.14}$$

♦

TRDITEV 5.5 [1] : Ko je k liho število, so vrednosti pozitivne.

Da to velja, se lahko hitro prepričamo, ko skonstruiramo tabelo.

$n \vert k$	0	1	2	3	4
-1	1	1	1	1	1
-2	- $\frac{1}{2}$	1 $\frac{3}{4}$	- $\frac{7}{8}$	- $\frac{15}{16}$	- $\frac{31}{32}$
-3	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{85}{216}$	$\frac{575}{1296}$	$\frac{3661}{7776}$
-4	- $\frac{1}{24}$	- $\frac{25}{288}$	- $\frac{415}{3456}$	- $\frac{5845}{41472}$	- $\frac{76111}{497664}$
-5	$\frac{1}{120}$	$\frac{137}{7200}$	$\frac{12019}{432000}$	$\frac{874853}{35920000}$	$\frac{58067611}{1555200000}$

Ni težko opaziti, da velja (po enačbi definicije Bellovega števila) [1] :

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = B(k) \tag{5.15}$$

in

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} = B(-k), \tag{5.16}$$

kjer je $B(k)$ Bellovo število z naravnim številom in $B(-k)$ Bellovo število z negativnim celim številom.
Če pa je tudi k negativno celo število, dobimo:

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = B(n) \tag{5.17}$$

ZGLED [1] :

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = B(-2) \approx 0,421 \tag{5.18}$$

♦

5.6.2 Zanimiva izreka

Zelo zanimivo povezavo s padajočimi potencami imajo Stirlingova števila 1. vrste, ko je n negativno celo število in ko je k pozitivno celo število. [1]

$$\alpha^{-\underline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} \alpha^{k}, n \geq 0 \tag{5.19}$$

Podobno velja tudi trditev, ko sta n in k negativni celi števili [1] :

$$\alpha^{-\underline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \alpha^{-k} \tag{5.20}$$

Poglavje 6

r-Stirlingova števila 1. vrste

Andrei Z. Broder je leta 1982 v članku *The r-Stirling numbers* prvič opisal ta števila in predstavil njihovo kombinatorično interpretacijo. V tem poglavju bom predstavil nekaj osnovnih izrekov in trditev ter nekaj primerov izračuna.

6.1 Definiciji r-Stirlingovih števil 1. vrste

DEFINICIJA 6.1 [20] : r-Stirlingovo število 1. vrste je število permutacij množice $[n]$ s k cikli tako, da so števila 1, 2, 3, ... r v različnih ciklih.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r \tag{6.1}$$

V 2. poglavju sem definiral nosilce cikla. Tako lahko r-Stirlingova števila 1. vrste definiramo tudi s pomočjo nosilcev cikla, in sicer: r-Stirlingovo število 1. vrste šteje število permutacij množice $[n]$ oz. permutacij λ z natanko k cikli tako, da so števila $1, 2, ..., r$ nosilci ciklov.

6.1.1 Računanje r-Stirlingovega števila 1. vrste

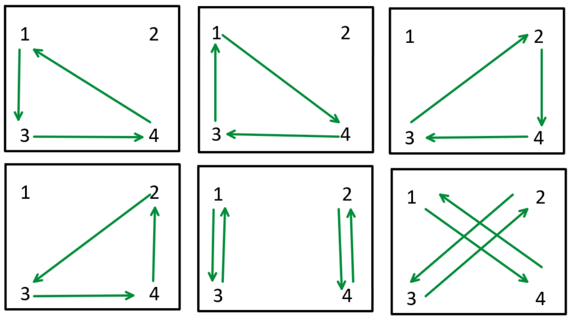
Oglejmo si dva zgleda.

ZGLED 1: Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$. Zanima nas, koliko permutacij množice [4] ima natanko 2 cikla, tako da števili 1 in 2 nista v istem ciklu. Možnosti je 6, saj so možni cikli (134)(2), (143)(2), (243)(1), (234)(1), (13)(24), (14)(23). Grafični prikaz je na sliki 6.1.

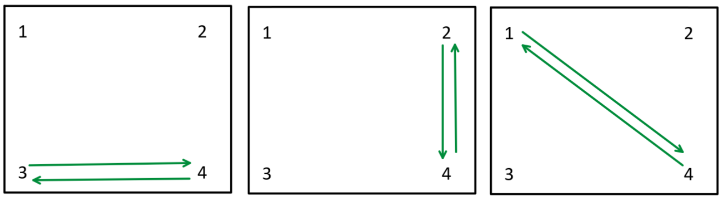
Po drugi definiciji bi lahko rekli, da iščemo permutacije množice [4] z natanko 2 cikloma tako, da sta števili 1 in 2 nosilca teh dveh ciklov:

(134) (2)
(143) (2)
(243) (1)
(234) (1)
(13) (24)
(24) (23) ♦

ZGLED 2: Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_3$. Zanima nas, koliko permutacij velikosti [3] ima natanko 2 cikla tako, da števila 1, 2 in 3 niso v istem ciklu. Možnosti je očitno malo, namreč samo 3, saj so možni cikli le (34)(1)(2), (24)(1)(3) in (14)(2)(3). Grafični prikaz je na sliki 6.2. ♦



Slika 6.1: Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_2$



Slika 6.2: Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_3$

6.2 r-Stirlingova števila 1. vrste in razporejanje po krožnicah

Stirlingova števila 1. vrste so števila razporeditev n elementov po k krožnicah. Potemtakem sem se vprašal: če imajo Stirlingova števila takšno interpretacijo, potem bi jih morala imeti tudi r - Stirlingova števila 1. vrste. Tako sem prišel do ugotovitve in primera iz vsakdanjika. Oglejmo si zgled.

ZGLED: V učilnici so 4 učenci. Na koliko različnih načinov jih lahko posedemo okrog dveh okroglih miz, če učenec A ne sme sedeti za isto mizo kot učenec B?

Rešitev je r-Stirlingovo število 1. vrste:

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_2$$

Ugotovimo, da lahko to storimo na 6 načinov. ♦

6.3 Nekaj trditev

TRDITEV 6.2 [20] : 0-Stirlingovo in 1-Stirlingovo število 1. vrste sta enaki Stirlingovemu številu 1. vrste (pri 1-Stirlingovem številu 1. vrste mora biti n večji od 0).

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}; n > 0 \tag{6.2}$$

ZGLED [moj zgled] :

$$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}; n > 0$$

♦

TRDITEV 6.3 [20] : r-Stirlingova števila 1. vrste imajo trikotniško rekurzijo:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = 0, \qquad n < r \tag{6.3}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \delta_{kr}, \qquad n = r \tag{6.4}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r, \qquad n > r \tag{6.5}$$

Prva trditev se ujema s trditvijo 7.2 in definicijo 7.1. ♦

6.4 Rekurzivna zveza za računanje r-Stirlingovih števil 1. vrste

TRDITEV 6.4 [20] :Za r-Stirlingova števila 1. vrste, ko je $n \geqslant r > 1$, velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \frac{1}{r-1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r, n \geqslant r > 1 \tag{6.6}$$

DOKAZ [20] : Alternativni zapis je:

$$(r-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r$$

Desna stran šteje število permutacij s $k-1$ cikli tako, da so števila 1, ..., $r-1$ nosilci ciklov, medtem ko število r ni nosilec cikla. To je enako

$$(r-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$$

Tako je lahko vsaka permutacija pridobljena na $r-1$ načinov od permutacije s k cikli, ko so števila 1, ... r nosilci ciklov z dodajanjem cikla, ki vsebuje število r na koncu cikla z manjšimi nosilci. ■

6.5 Tabele vrednosti r-Stirlingovih števil 1. vrste

S pomočjo prejšnjih izrekov in trditev v razdelku 7.2 lahko skonstruiramo tabele vrednosti za r-Stirlingova števila 1. vrste [20] .

6.5.1 Ko je r enak 0 in ko je r enak 1

S pomočjo trditve 7.2 lahko pokažemo, da so vrednosti pri $r = 0$ oz. $r = 1$ enake vrednostim Stirlingovih števil 1. vrste [20] .

6.5.2 Ko je r enak 2

Oglejmo si vrednosti n in k od 2 do 7 [20] :

$n \mid k$	2	3	4	5	6	7
2	1	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0
4	6	5	1	0	0	0
5	24	26	9	1	0	0
6	120	154	71	14	1	0
7	720	1044	570	155	20	1

6.5.3 Ko je r enak 3

[20]

$n \mid k$	3	4	5	6	7	8
3	1	0	0	0	0	0
4	3	1	0	0	0	0
5	12	7	1	0	0	0
6	60	47	12	1	0	0
7	360	342	119	18	1	0
8	2520	2754	1175	245	25	1

Poglavje 7

(l, r)-Stirlingova števila 1. vrste

Januarja leta 2021 sta Hacene Belbachir in Yahia Djemmada odkrila (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste in v članku predstavila njihovo kombinatorično interpretacijo.

7.1 Definicija (l, r)-Stirlingovega števila 1. vrste

DEFINICIJA 7.1 [5] : (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste štejejo število urejenega nabora l permutacij $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_l)$ množice $[n]$ z natanko k cikli tako, da so števila 1, 2, ...,r nosilci cikla in da velja:

$$\mathrm{cl}(\sigma_1) = \mathrm{cl}(\sigma_2) = ... = \mathrm{cl}(\sigma_l)$$

Urejen nabor je končni nabor oz. urejeno zaporedje elementov. n končni urejeni nabor je zaporedje oz. urejen nabor n elementov, kjer n ni negativno celo število. Končni nabor z 0 elementi je imenovan prazni nabor. Primer: urejeni nabor petih števil je denimo (1, 2, 3, 4, 5). Za notacijo uporabljamo več oklepajev: (), [], ali $\langle\ \rangle$. V tem primeru vzamemo končni nabor permutacij.

Označimo ga z:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$$

Očitno je, da velja:

- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = 0 \ za \ n < r.$
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = \delta_{k,r} \ za \ n = r.$

OPOMBA: (l, r)-Stirlingovih števil 1. vrste se ne da izračunati na podoben način kot r -Stirlingova števila ali Stirlingova števila 1. vrste. Za izračun uporabimo rekurzivni zvezi.

7.2 Rekurzivni zvezi

Iz rekurzij za (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste lahko izpeljemo sledeči rekurziji:

TRDITEV 7.2 [5] : Za vsak $n > r$ velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = (n-1)^l \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)} \tag{7.1}$$

DOKAZ: Nabor l permutacij množice $[n]$ pod pogojem, da so števila $1, 2, ..., r$ nosilci cikla, se lahko izračuna:

• z vstavljanjem n-tega elementa za vsak element v vsaki permutaciji nabora $(\lambda_1, ..., \lambda_l)$ permutacij množice $[n-1]$ z natanko k cikli tako, da so števila $1, 2, ...r$ prvi elementi v različnih ciklih in da velja $cl(\lambda_1) = cl(\lambda_2) = ... = cl(\lambda_l)$, torej obstaja $(n-1)^l \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$ možnosti.

• n-ti element tvori cikel v vsaki od permutacij nabora $(\lambda_1, ..., \lambda_l)$ permutacij, preostalih $[n-1]$ elementov pa mora biti razporejenih v $(k-1)$ ciklih pod prejšnjimi pogoji, zato obstaja $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}$ možnosti. ■

TRDITEV 8.3 [5] : Za vsak $n \geq r > 1$ velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = \frac{1}{(r-1)^l} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{r-1}^{(l)} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)} \right) \tag{7.2}$$

DOKAZ: Preštejmo število permutacij $(\lambda_1, ..., \lambda_l)$ množice $[n]$ z natanko $(k-1)$ cikli tako, da so števila $1, 2, ...r-1$ nosilci cikla, vendar številu r pogoj $cl(\lambda_1) = cl(\lambda_2) = ... = cl(\lambda_l)$ ne ustreza. Možnosti lahko preštejemo na dva načina:

• preštejemo permutacije $(\lambda_1, ...\lambda_l)$ množice $[n]$ s $(k-1)$ cikli tako, da so števila $1, 2, ..., r-1$ nosilci cikla in jih potem izključimo iz nabora permutacij, v katerih je r nosilec cikla. Tako dobimo:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{r-1}^{(l)} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r}^{(l)}$$

• preštejemo nabor permutacij $(\lambda_1, ..., \lambda_l)$ množice $[n]$ s k cikli tako, da so števila $1, 2, ..., r$ nosilci cikla, potem dodamo cikel s številom r, ki je nosilec na koncu cikla, ta cikel pa vsebuje že manjše nosilce cikla. Zato imamo $(r-1)$ možnosti v vsaki permutaciji. Tako dobimo:

$$(r-1)^l \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{r}^{(l)}$$

■

7.3 Formula za $n \geq r$ in $k = r$

TRDITEV 7.4 [5] : Za $n \geq r$ in $k = r$ velja:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{r}^{(l)} = (r^{\overline{n-r}})^l \tag{7.3}$$

DOKAZ: Trditev smo že dokazali v dokazih prejšnjih trditev. ■

Poglavje 8

Zaključek

V zaključku ugotavljam, da so permutacije, brez katerih se ne da razumeti Stirlingova števila 1. vrste, zanimive in uporabne tudi v vsakdanjem življenju. Stirlingova števila 1. vrste pa rešujejo problem razvrščanja elementov po krožnicah in so koeficienti v razvoju rastočih potenc po navadnih. Imajo zelo veliko uporabno vrednosti in so kot 'skriti zaklad'. V srednjih šolah se jih ne poučuje, poučuje se jih le na nekaterih fakultetah, zato so ta števila manj znana. Ugotavljam, da imajo Stirlingova števila 1. vrste tudi presenetljivo povezavo z ostalimi kombinatoričnimi števili, npr. z Lahovimi, Stirlingovimi števili 2. vrste in Bellovimi števili. Stirlingova števila se da zapisati tudi v obliki matrike, ki se imenuje Stirlingova matrika 1. vrste. Z inverzom Stirlingove matrike 1. vrste dobimo vrednosti predznačenih Stirlingovih števil 2. vrste, če pa namesto rastočih potenc vstavimo padajoče, dobimo predznačena Stirlingova števila 1. vrste. Presenetljiva je tudi povezava Stirlingovih števil z negativnimi vrednostmi Stirlingovih števil 1. vrste. Stirlingova števila 1. vrste z negativnimi vrednostmi so ena izmed prvih posplošitev. Dodajamo lahko omejitve, kot npr. r-Stirlingova števila 1. vrste, ki so tudi zelo zanimiva in uporabna v vsakdanjiku. Pri dodajanju urejenega nabora l permutacij dobimo čisto na novo odkrita (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste. V zaključku lahko odgovorim tudi na svoje vprašanje, na koliko različnih načinov lahko sedem učencev posedemo za štiri okrogle mize. Možnosti je $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, oziroma 735, kar je tudi potrditev moje hipoteze.

Med raziskovanjem sem se naučil veliko novega, med drugim tudi to, da Stirlingova števila 1. vrste najdemo na skoraj vseh področjih matematike, od kombinatorike do linearne in abstraktne algebre.

Raziskovalno nalogo sem napisal v programu $LaTeX$, ki sem se ga naučil uporabljati popolnoma sam. Moram poudariti, da je ta program zelo zahteven za uporabo in je bilo delo z njim poseben izziv.

Raziskovalna naloga je lahko temelj za iskanje novih posplošitev, kot npr. s-Stirlingova števila 1. vrste in (s, r)-Stirlingova števila 1. vrste.

Literatura

[1] D. Branson, *An extension of Stirling numbers*, FIBONACCI QUARTERLY, Vol. 34, pp. 213-222, Citeseer, 1996

[2] G.-S. Cheon, J.-S. Kim *Stirling matrix via Pascal matrix*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 329, pp.49-59, Elsevier, 2001

[3] A. Dasgupta, *Set theory*, Springer, 2014

[4] Ö. Eğecioğlu A. M. Garsia *Lessons in Enumerative Combinatorics*, Springer 2021

[5] H. Belbachir, Y. Djemmada, *The (l, r) - Stirling numbers: a combinatorial approach*, arXiv preprint arXiv:2101.11039, 2021

[6] J. - H. Jung, I. Mezo, J.L. Ramírez, *The r - Bessel and restricted r - Bell numbers*, The Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 70, pp. 202 - 220, 2018

[7] M. Juvan, P. Potočnik, *Teorija grafov in kombinatorika: primeri in rešene naloge*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 2000.

[8] M. Konvalinka in P. Potočnik, *Diskretna matematika I.*, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2019

[9] T. Košir, B. Lavrič, *Linearna algebra*, dostopno na http://www. fmf. uni# lj. si/dkosir/poucevanje/linalg. html., 2009

[10] D.E. Loeb, *A generalization of the Stirling numbers*,Discrete mathematics, Vol. 103, no. 3, pp. 259-269, Elsevier, 1992

[11] I. Mezo, *The dual of Spivey's Bell number formula*, Journal of integer sequences, Vol. 15, no. 2, 2012

[12] M. Petkovšek, T. Pisanski, *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 12, no.7, pp. 417-424, JSTOR, 2007

[13] P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne Matematike I.*, 2011

[14] P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz algebre in diskretne matematike*, Ljubljana, samozaložba, 2011

[15] M. Raič, *Funkcija Gama*, Ljubljana, 2018

[16] R.P. Stanley, S. Fomin, *Enumerative combinatorics. Vol. 2, volume 62 of*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1999

[17] M. Škrlec, *Matematika 4, zbirka naloga za gimnazije*, DZS založba, Ljubljana 2020

[18] I. Vidav, M. Sajovic, *Višja matematika 1*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1990

[19] H.S. Wilf, *generatingfunctionology*, CRC press, 2005

[20] A.Z. Broder, *The r - Stirling numbers*, Discrete Mathematics, Vol. 49, no.3, pp. 241-259, Elsevier, 1984

Viri slikovnega gradiva

Slika 2.1: Slika iz knjige [16]

Slika 3.1: http://serge.mehl.free.fr/chrono/Stirling.html Obiskano dne 11.12.2021.

Slika 3.2: https://en.wikipedia.org/wiki/James_Stirling_(mathematician)#media/File:Stirling__Methodus_differentialis,_sive_Tractatus_de_summatione_et_interpolatione_serierum_infinitarum,_1764_-_739821.tif Obiskano dne 11.12.2021.

Slika 3.3: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-0021-8 Obiskano dne 11.12.2021.

Slika 3.4: https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_first_kind#/media/File:Stirling_number_of_the_first_kind_s(4,2).svg Obiskano dne 11.12.2021.

Slika 5.1: https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_number Obiskano dne 11.12.2021.

Ostale slike v raziskovalni nalogi so avtorjeve.