

Krivulja, ki opisuje jajce

matematika

raziskovalna naloga

Avtorji: Kaja Zoe Romih, Brin Beltram, Zala Zupan

Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Marec, 2022

Inštitut montessori, Zasebna osnovna šola montessori, Ljubljana

Kazalo

Seznam slik	2
Seznam prilog	2
Povzetek	3
1. Uvod	4
1.2 Cilj raziskovalne naloge	5
1.2 Metode dela	5
2. Oblike jajc	6
3. Enačba krožnice in elipse	7
3.1 Enačba krožnice	7
3.1.1 Definicija krožnice	7
3.1.2 Izpeljava enačbe krožnice	7
3.2 Enačba elipse	8
3.2.1 Definicija elipse	8
3.2.2 Izpeljava enačbe elipse	8
4. Določitev enačbe krivulje, ki opisuje obliko jajca	11
5. Določitev približne enačbe krivulje jajčne oblike s pomočjo programa Geogebre	13
6. Določitev približne enačbe jajčne krivulje iz dimenzij	16
6.1 Določitev dimenzij (merskih konstant) jajca	16
6.2 Določanje merskih konstant s pomočjo merjenja fotografije jajca v Geogebri	17
6.3 Določanje merskih konstant s pomočjo merjenja jajca	19
7. Izboljšava modela	22
8. Zaključek	24
9. Viri in literatura	25
10. Priloge	26

Seznam slik

Slika 1: Univerzalna oblika enačbe krivulje, ki opisuje obliko jajca	4
Slika 2: K izpeljavi enačbe krožnice	7
Slika 3: Vrtnarska konstrukcija elipse	8
Slika 4: K izpeljavi enačbe elipse	9
Slika 5: Primer elipse s polosema $a = 4$, $b = 3$	10
Slika 6: Okroglo jajce opisuje krožnica $x^2 + y^2 = 6,5^2$	11
Slika 7: Elipsasto jajce opisuje elipsa $x^2/6,75^2 + y^2/5,25^2 = 1$	11
Slika 8: Jajce 1 – določanje krivulje jajčne oblike z drsniki v Geogebri	14
Slika 9: Jajce 2 – določanje krivulje jajčne oblike z drsniki v Geogebri	15
Slika 10: Določanje merskih konstant	16
Slika 11: Jajce 1 – merjeno v Geogebri	17
Slika 12: Jajce 2 – merjeno v Geogebri	18
Slika 13: Merjenje dimenzij jajca s kljunastim merilom (Foto: Brin Beltram)	19
Slika 14: Jajce 1 – merjeno ročno s kljunastim merilom	20
Slika 15: Jajce 2 – merjeno ročno s kljunastim merilom	21
Slika 16: Jajce je hruškaste oblike	22
Slika 17: Izboljšan model s štirimi drsniki	23

Seznam prilog

Priloga 1: Izpeljava enačbe približka krivulje, ki opisuje jajce
Priloga 2: Določanje krivulj s tremi drsniki s pomočjo programa Geogebra
Priloga 3: Izračun konstante c pri merjenju v Geogebri
Priloga 4: Izračun konstante c pri merjenju s kljunastim merilom
Priloga 5: : Določanje krivulj s štirimi drsniki s pomočjo programa Geogebra

Povzetek

V raziskovalni nalogi iščemo krivuljo, ki opisuje obliko jajca in načine, kako določimo to krivuljo. Vemo, da so jajca po obliki krivulje, ki jih opisuje, zelo različna in da je problem zelo zahteven. Septembra 2021 smo zasledili članek, da so matematiki odkrili splošno enačbo krivulje, ki lahko opiše obliko kateregakoli jajca. Enačba je zelo komplicirana in smo jo poenostavili. Z dobljeno enačbo lahko dobimo približno krivuljo. V nalogi smo pokazali tri načine, kako določimo to krivuljo: s pomočjo drsnikov v programu Geogebra, z merjenjem v programu Geogebra in z merjenjem dimenzij jajca s kljunastim merilom.

Ključne besede: krivulja, ki opisuje jajce, elipsa, oval, pyriform, hruškasta oblika

1. Uvod

Septembra 2021 smo na svetovnem spletu zasledili naslov, da so končno odkrili krivuljo, ki lahko opiše vsako obliko ptičjega jajca. Ta naslov nas je pritegnil. Znanstveniki so odkritje objavili v članku *Egg and math: introducing a universal formula for egg shape* (Valeriy, 2021). Enačba krivulje, ki je tam zapisana, je zelo komplicirana. A nas je ideja pritegnila in smo se odločili, da raziščemo problem iskanja enačbe krivulje, ki opisuje jajce. Univerzalna enačba krivulja je na Sliki 1 (kopija iz članka Valeriy, 2021).

$$y = \pm \frac{B}{2} \sqrt{\frac{L^2 - 4x^2}{L^2 + 8wx + 4w^2}} \times \left(1 - \frac{\sqrt{5.5L^2 + 11Lw + 4w^2} \times (\sqrt{3}BL - 2D_{L/4}\sqrt{L^2 + 2wL + 4w^2})}{\sqrt{3}BL(\sqrt{5.5L^2 + 11Lw + 4w^2} - 2\sqrt{L^2 + 2wL + 4w^2})} \times \left(1 - \sqrt{\frac{L(L^2 + 8wx + 4w^2)}{2(L - 2w)x^2 + (L^2 + 8Lw - 4w^2)x + 2Lw^2 + L^2w + L^3}} \right) \right)$$

Slika 1: Univerzalna oblika enačbe krivulje, ki opisuje obliko jajca

V univerzalni enačbi krivulje na Sliki 1 so konstante dimenzije jajca na določenih mestih.

1.2 Cilj raziskovalne naloge

Cilja raziskovalne naloge sta:

- določiti preprosto krivuljo, ki čimbolj natančno opisuje obliko jajca in
- opisati postopke, kako določimo krivuljo.

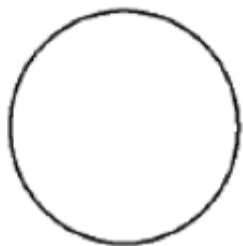
1.2 Metode dela

Pri raziskovalni nalogi smo uporabili naslednje metode:

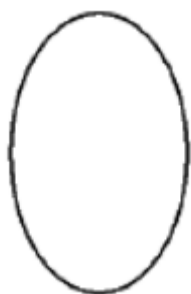
- delo po matematični literaturi in internetnih virih,
- preiskovanje s programom Geogebra,
- matematično sklepanje in računanje.

2. Oblike jajc

Raziskovalci so razporedili oblike jajc v štiri skupine: okrogla, eliptična, ovalna in hruškaste oblike (ang: pyriform) glede na obliko krivulje, ki jo dobimo s presekom jajca z ravnino vzdolž osi. Skice so kopirane iz članka (Valeriy, 2021).



Presek je krog (jajce je krogla).



Presek je elipsa (jajce je elipsoid).



Presek je oval (tudi jajčnica) (jajce je ovoid).



Presek je hruškaste oblike (ang: pyriform) (jajce je podobno hruški, plašč je podoben plašču prisekanega stožca).

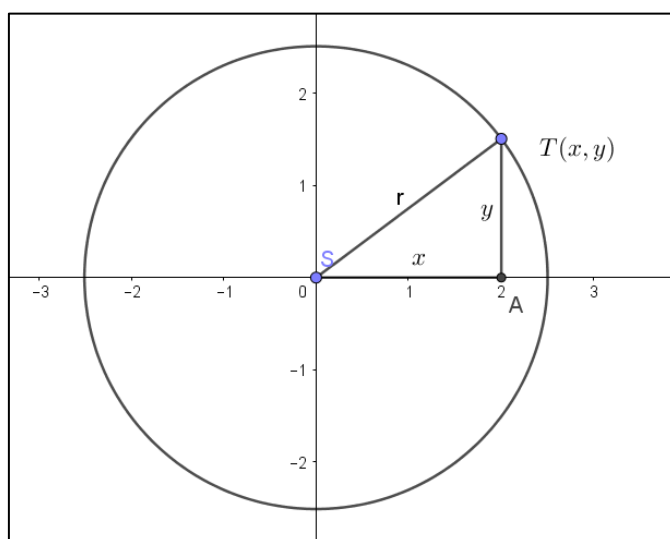
3. Enačba krožnice in elipse

3.1 Enačba krožnice

3.1.1 Definicija krožnice

Definicija: Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od dane točke, središča.

3.1.2 Izpeljava enačbe krožnice



Slika 2: K izpeljavi enačbe krožnice

Naj bo točka T točka na krožnici (Slika 2). Njene koordinate naj bodo x in y . Po Pitagorovem izreku je zveza med x, y in r :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

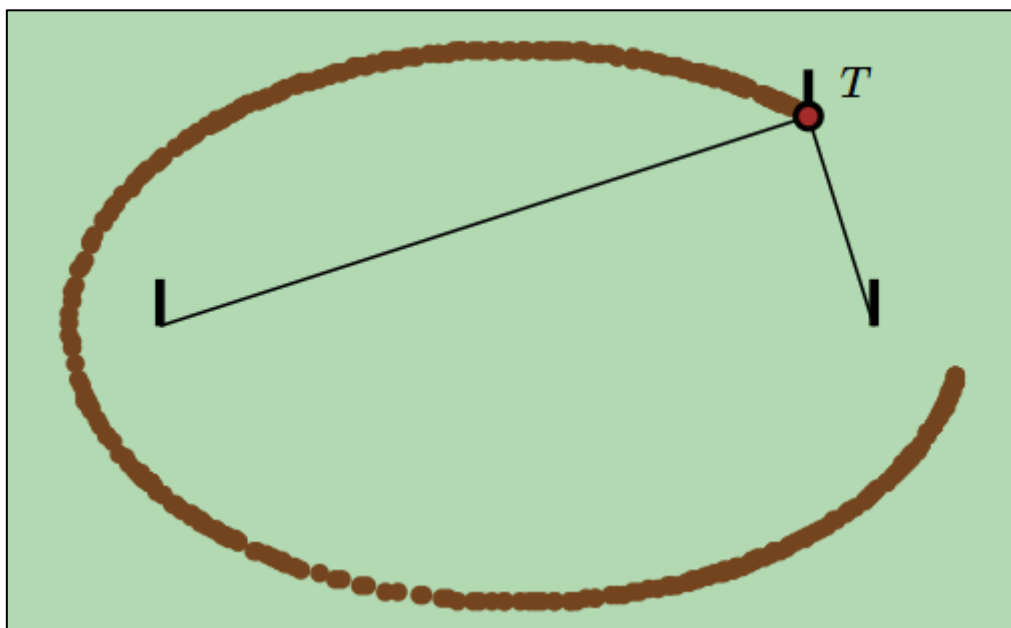
Primer: Enačba $x^2 + y^2 = 25$ je enačba krožnice s polmerom 5.

3.2 Enačba elipse

3.2.1 Definicija elipse

Elipsa je množica točk v ravnini, za katere velja, da je vsota razdalj do dveh izbranih točk (gorišč) vedno enaka (pri isti elipsi).

V skladu z definicijo lahko narišemo elipso (Slika 3.). To konstrukcijo imenujemo vrtnarska konstrukcija elipse.

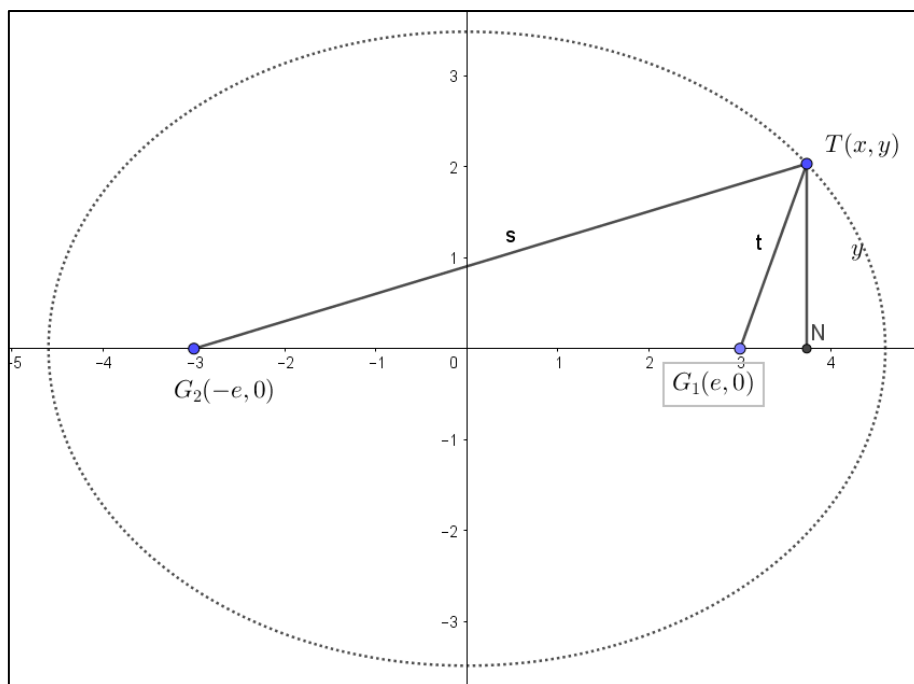


Slika 3: Vrtnarska konstrukcija elipse

(Vir: <https://eucbeniki.sio.si/vega3/360/index1.html>)

3.2.2 Izpeljava enačbe elipse

Pomagali smo si z učbenikom za tretji letnik gimnazije (Pavlič, 2013, str. 90). Središče elipse postavimo v izhodišče koordinatnega sistema. Gorišči označimo z G_1 in G_2 . Razdaljo gorišča od izhodišča označimo z e . Tako sta gorišči $G_1(e, 0)$ in $G_2(-e, 0)$. Točka na elipsi naj bo $T(x, y)$, razdalja točke T od levega gorišča s , od desnega gorišča pa t (Slika 4).



Slika 4: K izpeljavi enačbe elipse

Trikotnik G_2NT je pravokotni trikotnik, zato velja: $s^2 = (e + x)^2 + y^2$. Prav tako je tudi trikotnik G_1NT pravokotni trikotnik. V njem velja: $t^2 = (x - e)^2 + y^2$.

Po definiciji je vsota razdalj $s + t$ vedno enaka. Označimo jo z $2a$. Torej je

$$s + t = 2a. \quad \text{Izračunajmo } s^2 - t^2 = (e + x)^2 - (x - e)^2 = 4ex$$

Ker je $s^2 - t^2 = (s - t)(s + t)$, dobimo $(s - t)(s + t) = 4ex$

$$(s - t)2a = 4ex$$

$$s - t = \frac{2ex}{a}$$

Zadnjo enačbo seštejemo z enačbo $s + t = 2a$ in dobimo $2s = 2a + \frac{2ex}{a}$ oziroma

$$s = a + \frac{ex}{a}$$

Dobljeni izraz za s vstavimo v: $s^2 = (e + x)^2 + y^2$:

$$\left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 = (e + x)^2 + y^2$$

$$a^2 + 2ex + \frac{e^2 x^2}{a^2} = e^2 + 2ex + x^2 + y^2$$

$$x^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - e^2$$

Označimo: $a^2 - e^2 = b^2$ in dobimo

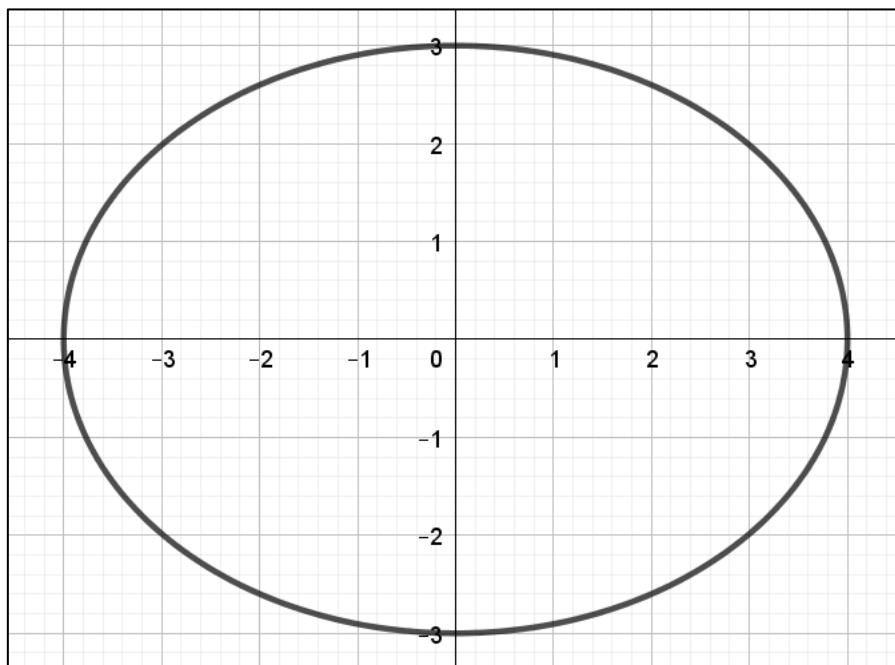
$$\frac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

Delimo še z b^2 in dobimo enačbo elipse, kot jo običajno zapišemo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Konstanti a in b imenujemo polosi elipse.

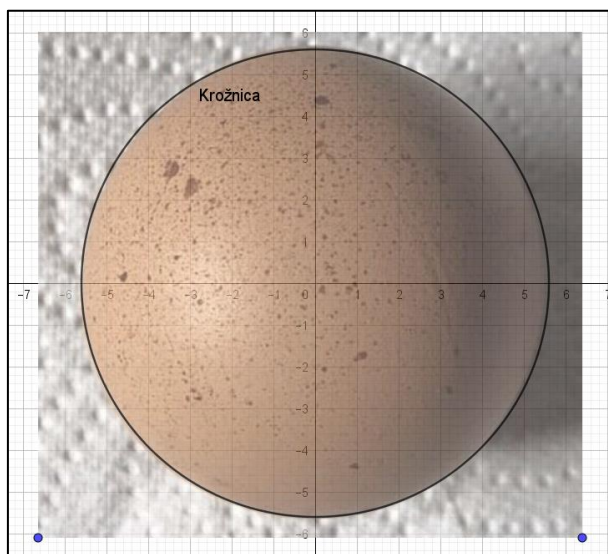
Primer: Narišimo enačbo elipse: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ Določimo $a = 4$ in $b = 3$. (Slika 5)



Slika 5: Primer elipse s polosema $a = 4$, $b = 3$

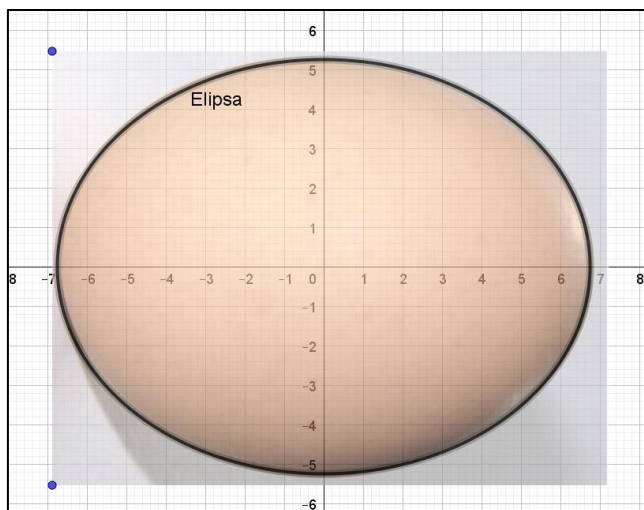
4. Določitev enačbe krivulje, ki opisuje obliko jajca

Jajce okrogle oblike opišemo z enačbo krožnice, jajce elipsaste oblike pa z enačbo elipse. Pri krogu je potrebno določiti polmer r , pri elipsi pa dolžini obeh polosi a in b . To lahko naredimo neposredno z merjenjem ali pa tako, da vstavimo fotografijo v program Geogebra in odčitamo mere. Na Sliki 6 je primer okroglega jajca, na Sliki 7 pa primer elipsastega jajca.



Slika 6: Okroglo jajce opisuje krožnica $x^2 + y^2 = 6,5^2$

(Vir fotografije: <https://www.bbc.com/news/uk-england-merseyside-40324415>)



Slika 7: Elipsasto jajce opisuje elipsa $x^2/6,75^2 + y^2/5,25^2 = 1$

(Vir fotografije: <https://www.mathatube.com/glo-oval-shape>)

Raziskovalci so v članku *Egg and math: introducing a universal formula for egg shape* (Valeriy, 2021) objavili enačbo, ki po njihovem mnenju opisuje katero koli obliko ptičjega jajca (Slika 1). Prepričani smo, da so v odkritje te enačbe vložili veliko teoretičnega in eksperimentalnega dela. Konstante, ki nastopajo v enačbi, so mere jajca na določenih delih in sicer je L dolžina jajca, B debelina, w oddaljenost od središča do mesta, kjer je jajce najdebelejše in $D_{L/4}$ debelina na razdalji $L/4$. Naš cilj je izpeljati enačbo krivulje, ki bo približna. Opazili smo, da je enačba na Sliki 1 zgrajena iz treh faktorjev. Sklepamo, da je v prvem delu skrita neka približna krivulja, ki jo potem ostala dva faktorja nekoliko priredita glede na mere in oddaljenost od središča. Zato ju bomo izpustili in raziskali pomen prvega faktorja. Tako dobimo enačbo:

$$y = \mp \frac{B}{2} \sqrt{\frac{L^2 - 4x^2}{L^2 + 8wx + 4w^2}} \quad (3)$$

Enačbo kvadriramo, vstavimo $L=2a$, $B=2b$, $w=m$ in pomnožimo s faktorjem $L^2 + 8wx + 4w^2$. Tako dobimo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{a^2 + m^2 + 2mx}{a^2} \right) = 1 \quad (4)$$

Ko je jajce simetrično glede na dolžino, je $m=0$. Takrat dobimo v (3) enačbo elipse. Predvidevamo, da faktor $\frac{a^2 + m^2 + 2mx}{a^2}$ doda nesimetričnost elipse. Ta faktor še nekoliko poenostavimo tako, da števec in imenoalec delimo z $a^2 + m^2$. Tako imamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{1 + \frac{2m}{a^2 + m^2} x}{\frac{a^2}{a^2 + m^2}} \right) = 1 \quad (5)$$

Za približek enostavne enačbe krivulje vzemimo, da maksimalna debelina jajca ni predaleč od središča jajca ali da je m majhen. Takrat je faktor $\frac{a^2}{a^2+m^2}$ približno enak 1 in ga lahko v enačbi (4) zanemarimo. Označimo še $c = \frac{2m}{a^2+m^2}$ in dobimo enačbo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (1 + cx) = 1, \text{ kjer je } c = \frac{2m}{a^2+m^2} \quad (6)$$

Podrobna izpeljava je v Prilogi 1.

5. Določitev približne enačbe krivulje jajčne oblike s pomočjo programa Geogebra

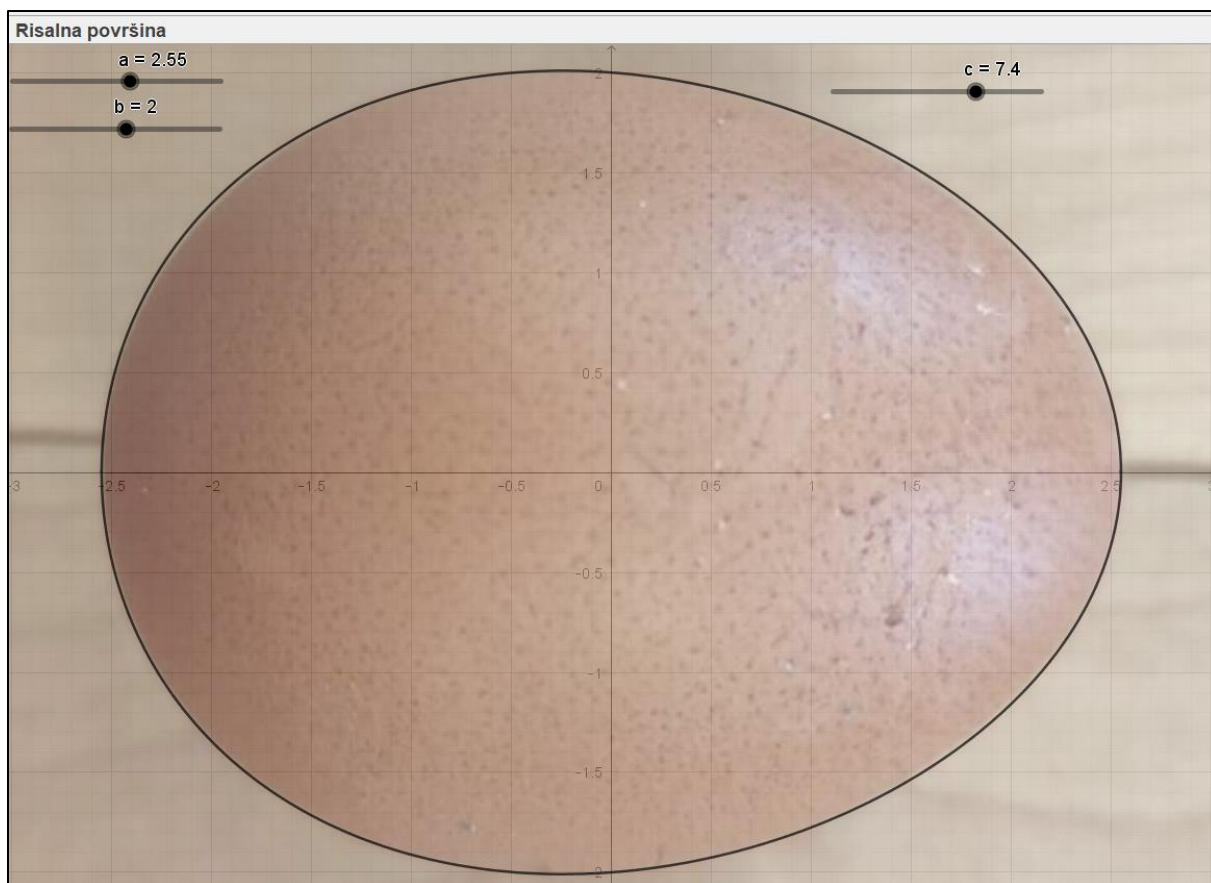
V Geogebro vnesemo sliko jajca in jo postavimo simetrično tako, da je njegovo središče v koordinatnem izhodišču. Določimo dolžino $2a$ in debelino $2b$ pri polovici dolžine jajca. V Geogebro vnesemo drsnike z oznakami a, b in c z mejami med -20 in 20 ter s prirastkom 0.001.

Vpišemo enačbo (6). Ker je vrednost parametra c zelo majhna, se iz praktičnih razlogov odločimo za stokrat večji faktor in se potem enačba preoblikuje.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{c}{100} x \right) = 1 \quad (7)$$

S premikanjem drsnikov dobimo kar dober približek krivulje.

Primeri sta na Sliki 8 in Sliki 9.

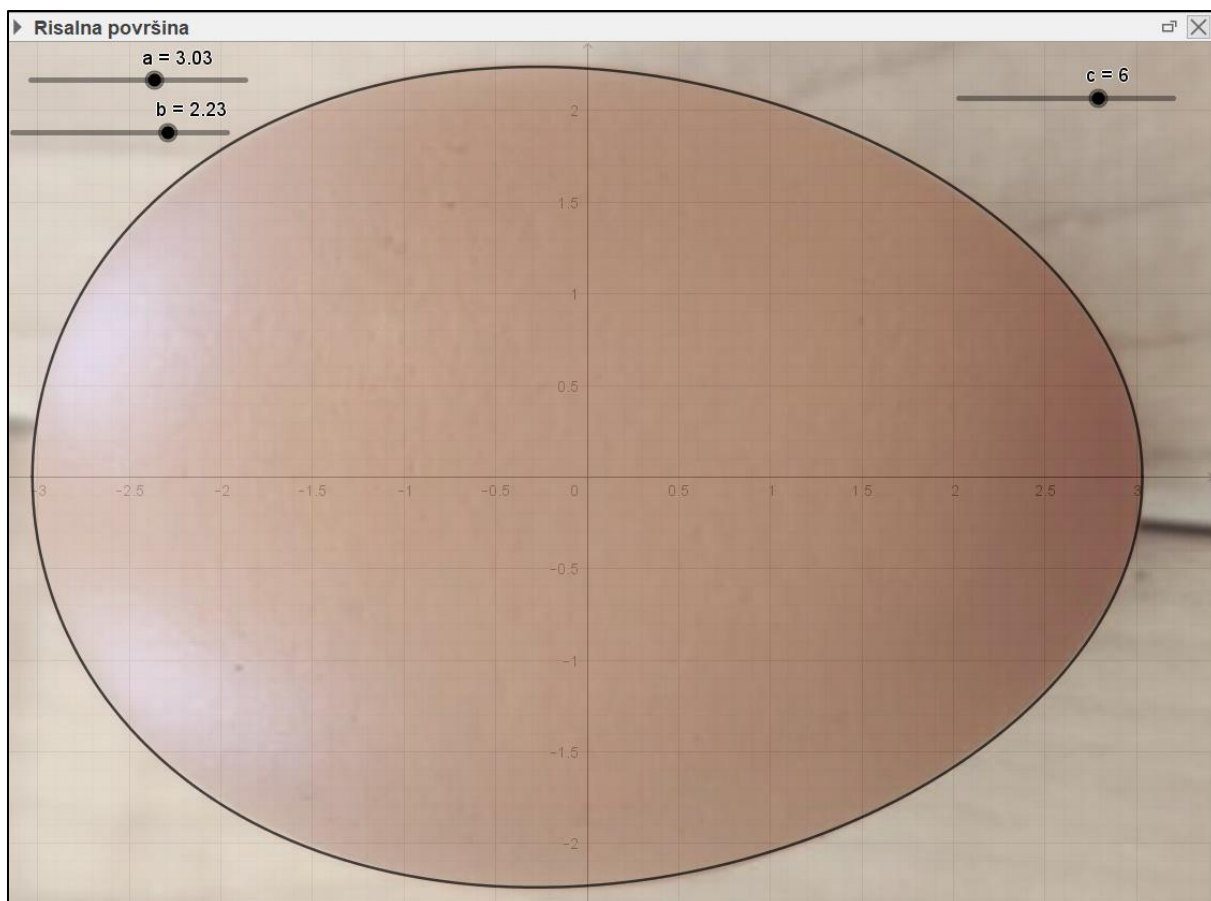


Slika 8: Jajce 1 – določanje krivulje jajčne oblike z drsniki v Geogebri

Rezultati, ki smo jih dobili s primerom jajca 1 na Sliki 8, so naslednji:

Podatki: $a = 2.55$; $b = 2$, $c = 7.4$,

Enačba krivulje pa je: $\frac{x^2}{2,55^2} + \frac{y^2}{4} \left(1 + \frac{7,4}{100}x\right) = 1$



Slika 9: Jajce 2 – določanje krivulje jajčne oblike z drsniki v Geogebri

Rezultati, ki smo jih dobili s primerom 2 na Sliki 9, so naslednji:

Podatki: $a = 3.03$; $b = 2.23$, $c = 6$,

Enačba krivulje pa je: $\frac{x^2}{3,03^2} + \frac{y^2}{2,23} \left(1 + \frac{6}{100}x\right) = 1$

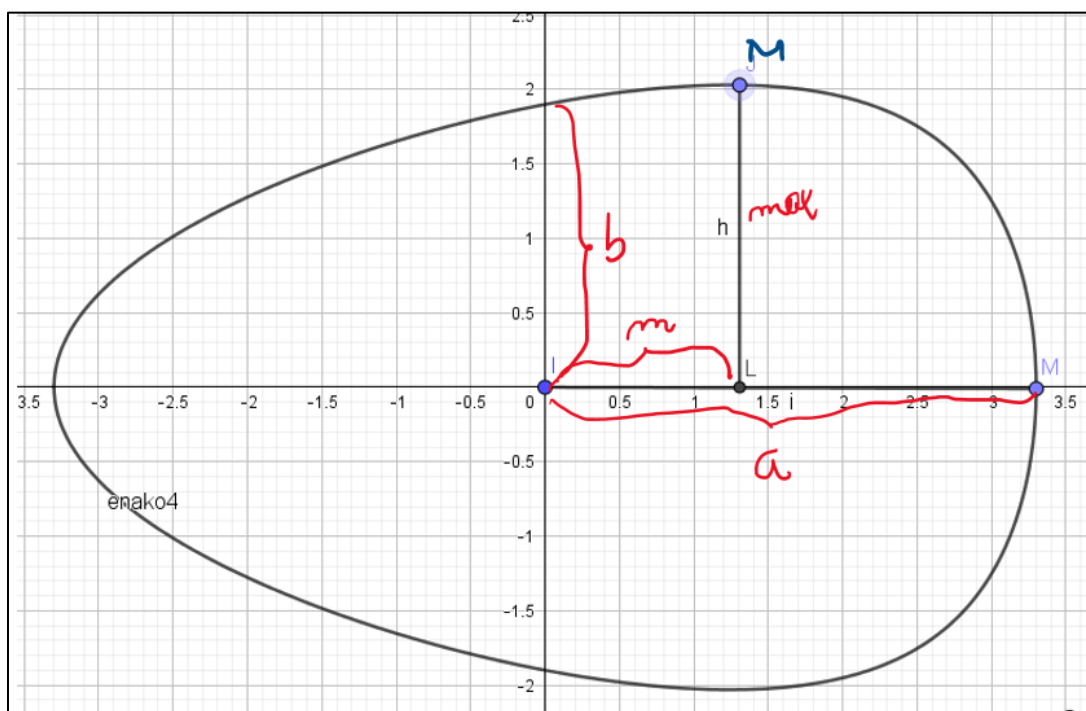
Slike primerov so prikazane v Prilogi 2.

6. Določitev približne enačbe jajčne krivulje iz dimenzij

6.1 Določitev dimenzij (merskih konstant) jajca

Oblika jajca na Sliki 8 in Sliki 9 je nesimetrična. V teh primerih smo dobili c pozitiven. Ker je parameter c povezan s parametrom m (pričakujemo negativen m), je (na osnovi primerov) bolje (bolj praktično), da vzamemo za konstanto $c = -\frac{200m}{m^2+a^2}$. Vsebina pa ostane nespremenjena, spreminja se le predznak konstante c .

V Geogebro vnesemo sliko jajca (skica je na Sliki 10) in jo postavimo simetrično tako, da je njegovo središče v koordinatnem izhodišču. Določimo dolžino $2a$ in debelino $2b$ pri polovici dolžine jajca. Prav tako poiščemo točko $M(m, y)$ na jajčni krivulji, kjer je jajce najdebelejše. Z m označimo absciso te točke.



Slika 10: Določanje merskih konstant

Najprej izračunamo konstanto c po enačbi: $c = -\frac{200m}{m^2+a^2}$ ter zapišemo enačbo

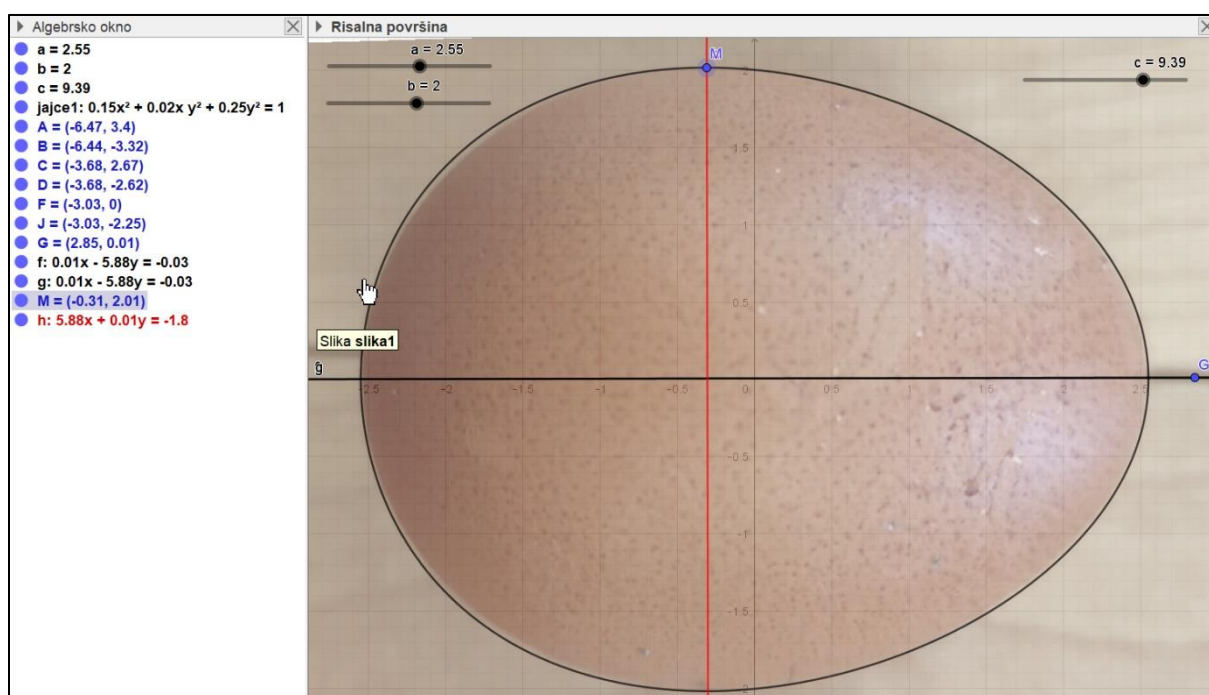
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{c}{100}x\right) = 1 \quad c = -\frac{200m}{m^2+a^2} \quad (8)$$

6.2 Določanje merskih konstant s pomočjo merjenja fotografije jajca v Geogebri

Jajce fotografiramo in fotografijo vnesemo v program Geogebra. Na mreži ali z drsnikom za a in b odčitamo polosi a in b ter določimo točko, v kateri je jajce najširše. Prva koordinata te točke je konstanta m . Iz podatkov najprej izračunamo konstanto c , nato zapišemo enačbo. Uporabim enačbo (8).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{c}{100} x \right) = 1 \quad c = -\frac{200m}{m^2 + a^2}$$

Primeri smo prikazali na Sliki 11 in Sliki 12.

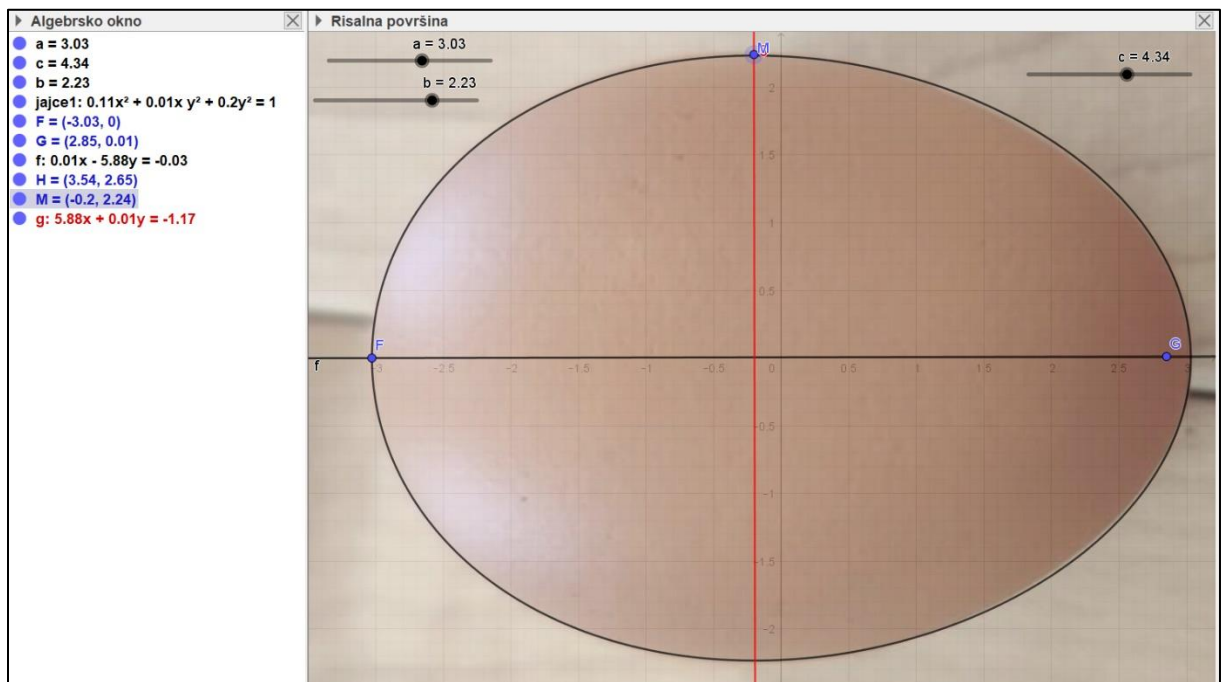


Slika 11: Jajce 1 – merjeno v Geogebri

Pri jajcu na Sliki 11 smo dobili naslednje podatke: $a = 2,55$, $b = 2$, $m = -0,31$ in izračunali $c = 9,39$ (Priloga 3).

Enačba krivulje, ki opisuje jajce na Sliki 11, je:

$$\frac{x^2}{2,55^2} + \frac{y^2}{2^2} \left(1 + \frac{9,39}{100} x \right) = 1$$



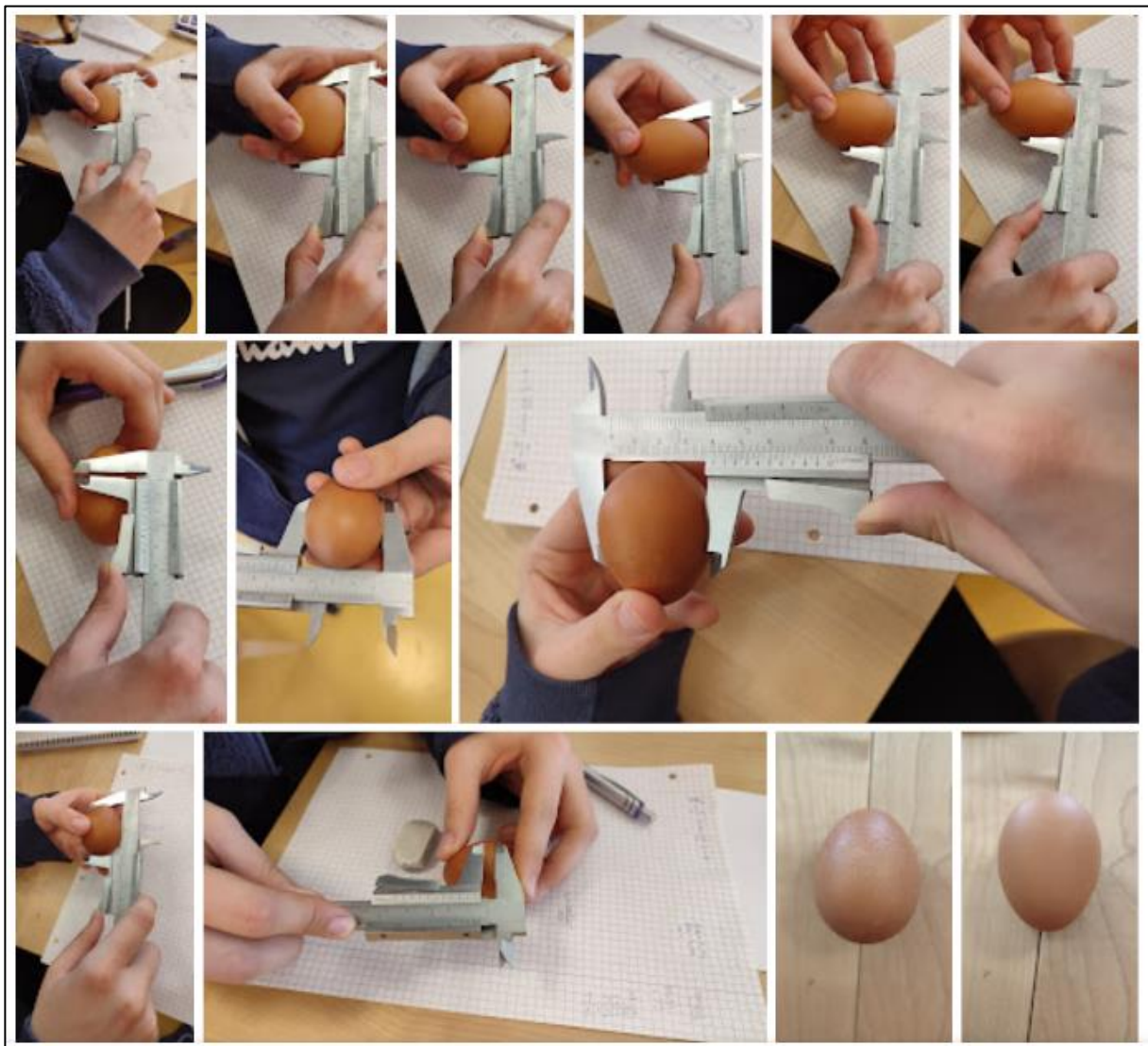
Slika 12: Jajce 2 – merjeno v Geogebri

Pri jajcu na Sliki 12 smo dobili naslednje podatke: $a = 3,03$, $b = 2,23$, $m = -0,2$ in izračunali $c = 4,34$ (Priloga 3).

Enačba krivulje, ki opisuje jajce na Sliki 12, je:

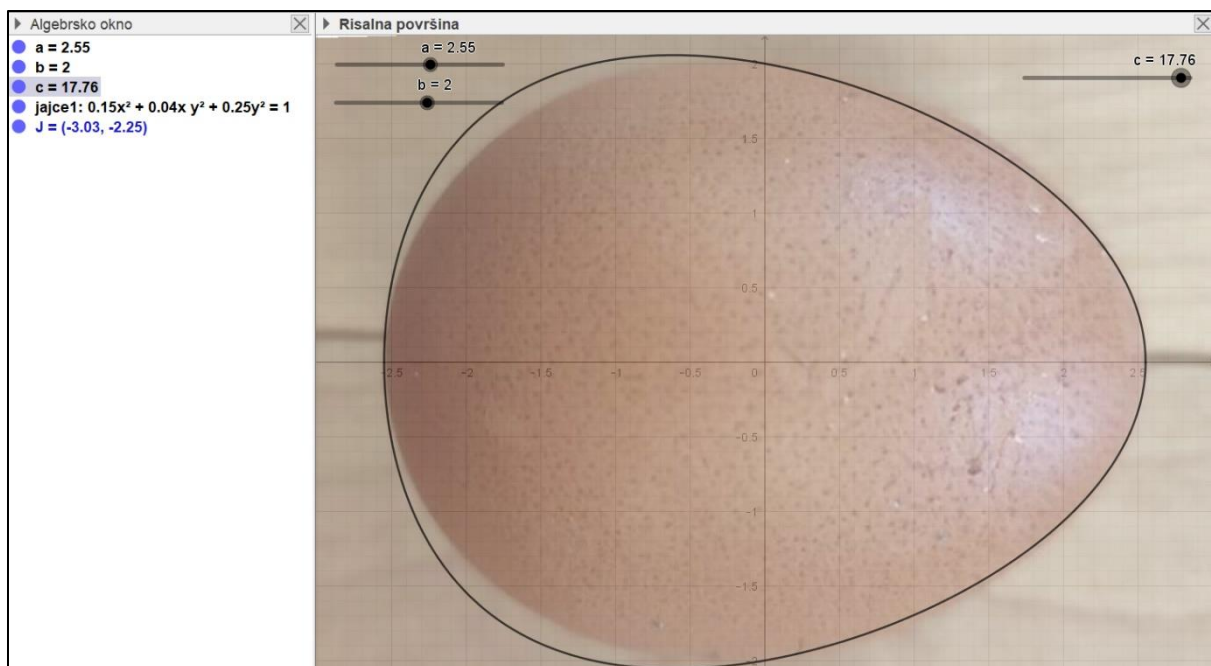
$$\frac{x^2}{3,03^2} + \frac{y^2}{2,23^2} \left(1 + \frac{4,34}{100}x\right) = 1$$

6.3 Določanje merskih konstant s pomočjo merjenja jajca



Slika 13: Merjenje dimenzij jajca s kljunastim merilom (Foto: Brin Beltram)

Konstante a , b in c , ki jih vstavimo v enačbo (8), lahko določimo tudi z merjenjem jajca s kljunastim merilom. Zavedamo se, da je zlasti določanje lege točke, v kateri je jajce najširše (najdebelejše), zelo približno. Slika 13 prikazuje merjenje jajc s kljunastim merilom, na Sliki 14 in Sliki 15 pa primera meritev jajc in krivulj.



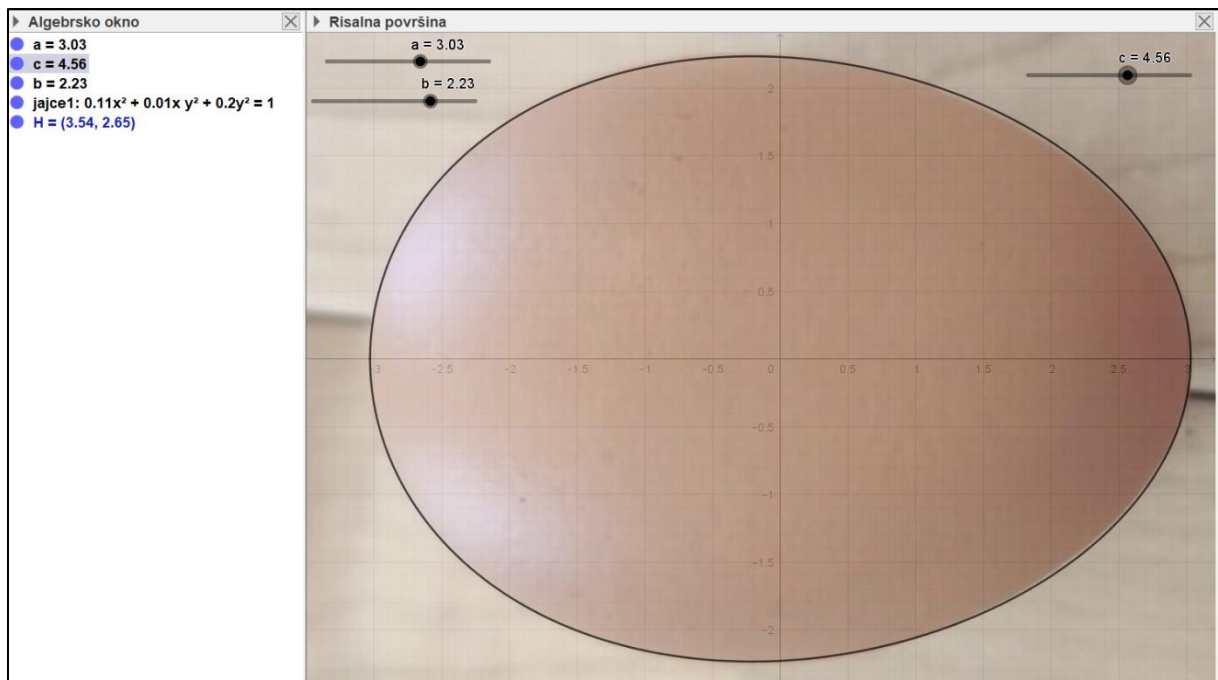
Slika 14: Jajce 1 – merjeno ročno s kljunastim merilom

Pri jajcu na Sliki 14 smo dobili naslednje podatke:

ročno $a = 2,55 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $m = -0,61 \text{ cm}$ in izračunali $c = 17,76$ (Priloga 4). Podatke smo vnesli v enačbo, da vidimo odstopanje.

Enačba krivulje, ki opisuje jajce na Sliki 14, je:

$$\frac{x^2}{2,55^2} + \frac{y^2}{2^2} \left(1 + \frac{17,76}{100}x\right) = 1$$



Slika 15: Jajce 2 – merjeno ročno s kljunastim merilom

Pri jajcu na Sliki 15 smo dobili naslednje podatke: ročno $a = 3,03 \text{ cm}$, $b = 2,23 \text{ cm}$, $m = -0,21 \text{ cm}$ in izračunali $c = 4,56$ (Priloga 4). Podatke smo vnesli v enačbo, da vidimo odstopanje.

Enačba krivulje, ki opisuje jajce na Sliki 15, je:

$$\frac{x^2}{3,03^2} + \frac{y^2}{2,23^2} \left(1 + \frac{4,56}{100}x\right) = 1$$

7. Izboljšava modela

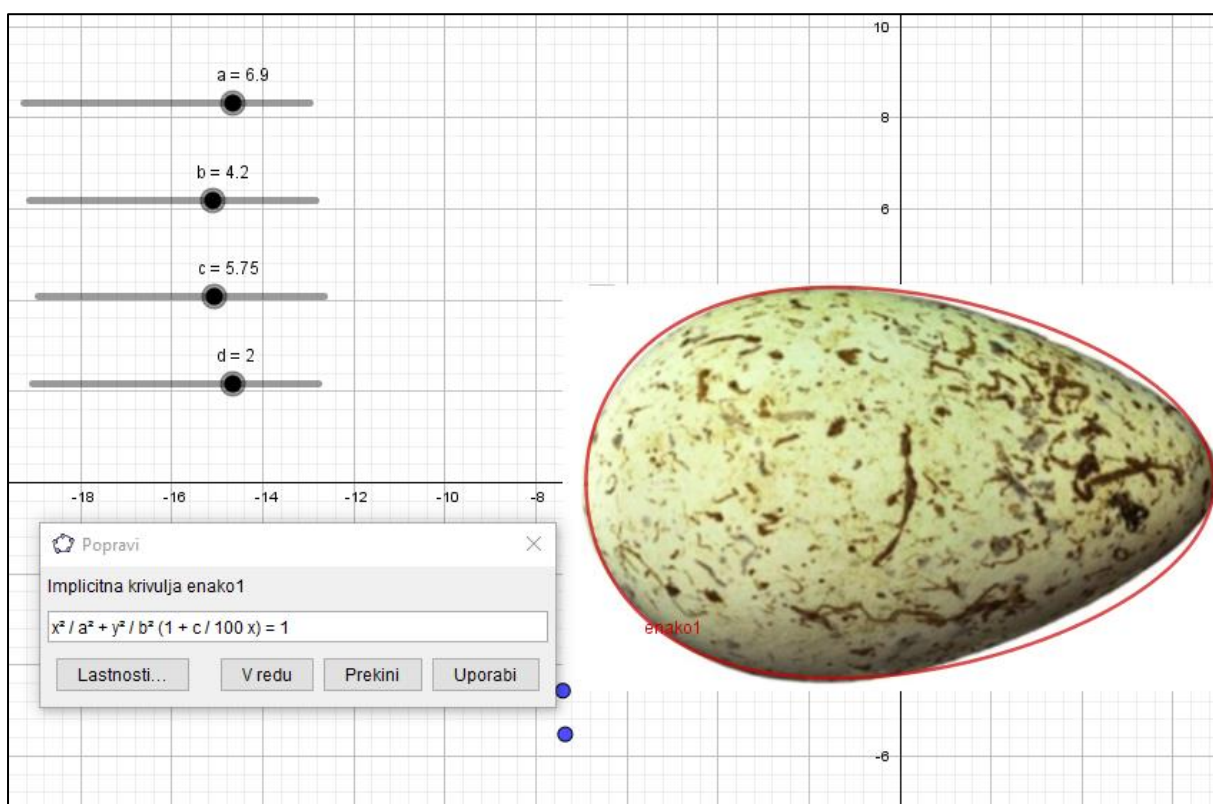
S primeri smo izkustveno ugotovili, da so krivulje, dobljene z modelom (6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{c}{100}x\right) = 1$$

približne. Opazili smo, da se večja odstopanja pojavljajo v primerih, ko so jajca podobna hruškasti obliki. Prišli smo na idejo, da bi izraz v oklepaju (v formuli (8)) nadaljevali s kvadratnim členom.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{c}{100}x + \frac{d}{100}x^2\right) = 1 \quad (9)$$

V tem primeru smo delali le po metodi s štirimi drsniki z Geogebro. Formule za konstanto d nismo poskušali izpeljati iz dimenzij jajca. Primerjava je prikazana na Sliki 16 in Sliki 17.



Slika 16: Jajce je hruškaste oblike

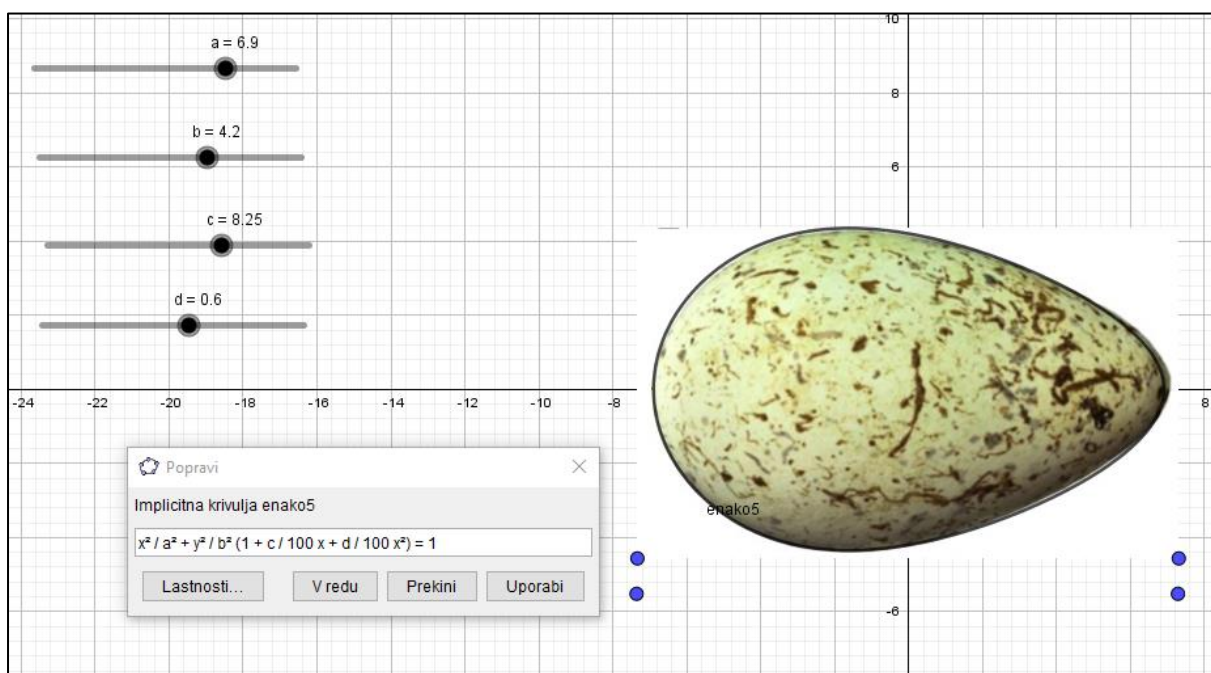
(Vir fotografije (Valeriy, 2021))

Za jajce na Sliki 16 smo dobili naslednje konstante:

$$a = 6,9, b = 4,2 \text{ in } c = 5,75$$

ter enačbo krivulje:

$$\frac{x^2}{6,9^2} + \frac{y^2}{4,2^2} \left(1 + \frac{5,75}{100} x \right) = 1$$



Slika 17: Izbolšan model s štirimi drsniki

(Vir fotografije (Valeriy, 2021))

Za jajce na Sliki 17 smo dobili naslednje konstante: $a = 6,9$, $b = 4,2$ in $c = 8,25$ in $d = 0,6$

ter enačbo krivulje:

$$\frac{x^2}{6,9^2} + \frac{y^2}{4,2^2} \left(1 + \frac{8,25}{100} x + \frac{0,6}{100} x^2 \right) = 1$$

Opazimo, da se druga krivulja veliko bolj prilega obliki jajca. Večje prileganje krivulj smo opazili tudi pri ostalih oblikah jajc (Priloga 5).

8. Zaključek

V nalogi smo obravnavali izziv, kako opišemo približno krivuljo, s katero opišemo obliko jajca. Izpeljana enačba kar dobro opisuje večino jajc, največje odstopanje je pri hruškasti obliki jajca. Najboljše ujemanje smo dobili z metodo z drsniki v Geogebra, najmanjše ujemanje pa z ročnim merjenjem.

Ob raziskovanju oblike smo si zastavljali vprašanje, zakaj so jajca tako različne oblike in da ptičja (in kokošja jajca) praktično niso okrogla. Domnevamo, da je taka oblika naravna, saj onemogoča, da jajce ne pade tako hitro iz gnezda ali s skalnate police. Za odgovor na to vprašanje bi bilo potrebno raziskati bolj biološko in razvojno naravo ptičev. Drugo vprašanje pa je, za kaj bi lahko te krivulje uporabili. Morda je odgovor v tem, da bi lahko z opisom oblik lahko raziskovali lastnosti jajc.

9. Viri in literatura

1. Pavlič, G. in drugi (2013): *Spatium Novum*, Matematika za gimnazije. Ljubljana: Modrijan.
2. Valeriy G. Narushin, Michael N. Romanov, Darren K. Griffin (2021): **Egg and math: introducing a universal formula for egg shape**. *Annals of the New York Academy of Sciences*. Dostopno na naslovu: <https://nyaspubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/nyas.14680>
Dostopano: 10. 9. 2021

10. Priloge

Priloga 1: Izpeljava enačbe približka krivulje, ki opisuje jajce

$$y = \pm \frac{B}{2} \sqrt{\frac{L^2 - 4x^2}{L^2 + 8mx + 4m^2}}$$

$$\begin{aligned} L &= 2a \\ B &= 2b \\ m &= m \end{aligned}$$

$$y = \pm \frac{2b}{2} \sqrt{\frac{4a^2 - 4x^2}{4a^2 + 8mx + 4m^2}}$$

$$y = \pm b \frac{\sqrt{4a^2 - 4x^2}}{\sqrt{4a^2 + 8mx + 4m^2}} \quad / ()^2$$

$$y^2 = b^2 \frac{4a^2 - 4x^2}{4a^2 + 8mx + 4m^2}$$

$$y^2 = b^2 \frac{4(a^2 - x^2)}{4(a^2 + 2mx + m^2)} \quad / \frac{(a^2 + 2mx + m^2)}{1}$$

$$y^2(a^2 + 2mx + m^2) = b^2(a^2 - x^2)$$

$$y^2(a^2 + 2mx + m^2) = b^2a^2 - b^2x^2 \quad / : b^2a^2$$

$$\frac{y^2(a^2 + 2mx + m^2)}{b^2a^2} = \frac{b^2a^2}{b^2a^2} - \frac{b^2x^2}{b^2a^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{a^2 + 2mx + m^2}{a^2} \right) \cdot \frac{1}{m^2a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{a^2 + 2mx + m^2 \cdot \frac{1}{m^2a^2}}{a^2 \cdot \frac{1}{m^2a^2}} \right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{\frac{a^2 + m^2}{a^2 m^2} + \frac{2mx}{m^2 a^2}}{\frac{a^2}{m^2 a^2}} \right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(\frac{1 + \frac{2mx}{m^2 a^2}}{\frac{a^2}{m^2 a^2}} \right) = 1 \quad \frac{a^2}{m^2 a^2} \approx 1$$

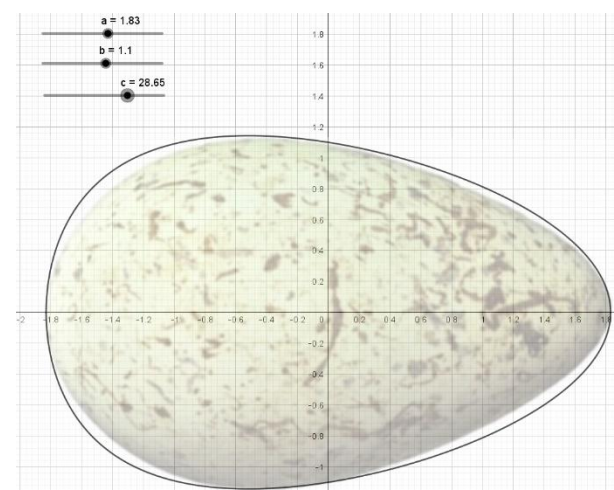
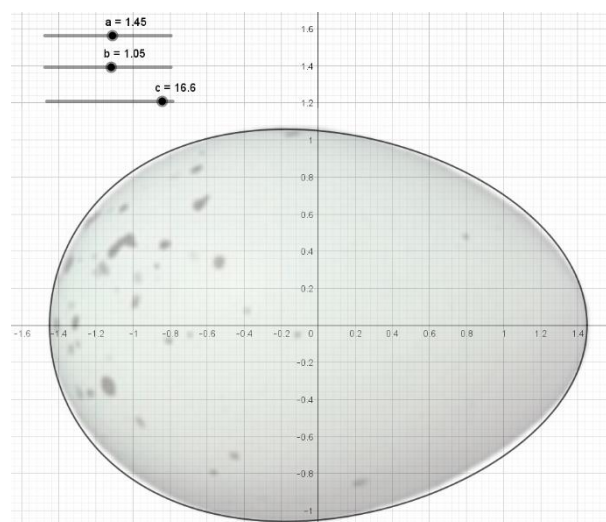
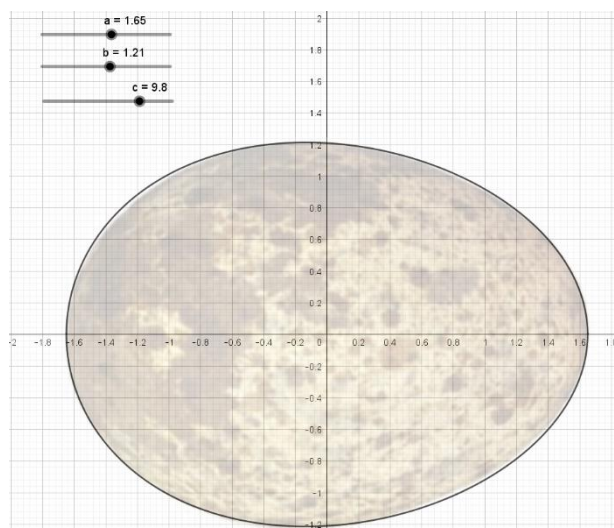
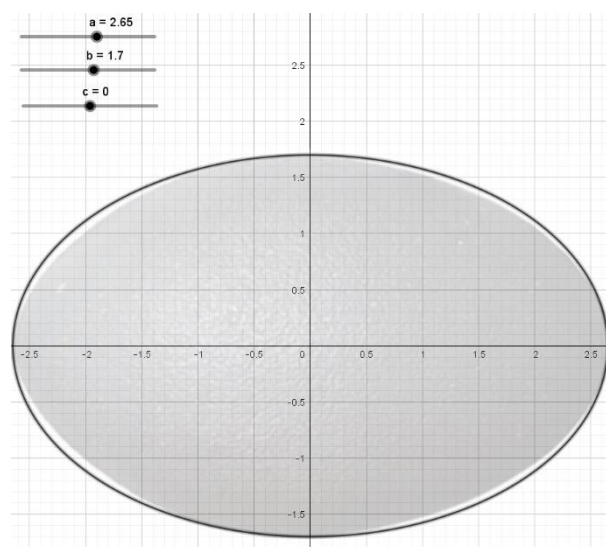
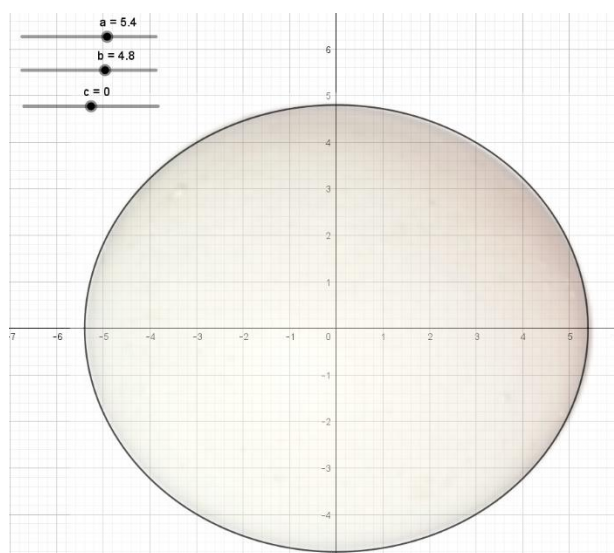
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2mx}{m^2 a^2} \right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{2m}{m^2 a^2} \cdot X \right) = 1 \quad \frac{2m}{m^2 a^2} = C$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (1 + C \cdot X) = 1$$

Priloga 2: Določanje krivulj s tremi drsniki s pomočjo programa Geogebra

Vir fotografije (Valeriy, 2021))



Priloga 3: Izračun konstante c pri merjenju v Geogebri

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{cx}{100}\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{(2,55)^2} + \frac{y^2}{(2)^2} \cdot \left(1 + \frac{9,39}{100}x\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{6,50} + \frac{y^2}{4} \cdot \left(1 + 0,0939x\right) = 1$$

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{6,50} + \frac{y^2}{4} \cdot \left(1 + 0,0939x\right) = 1}}$$

$$\begin{aligned} a &= 2,55 \text{ cm} \\ b &= 2 \text{ cm} \\ m &= -0,31 \text{ cm} \\ c &= 9,39 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$c = -\frac{200m}{m^2 + a^2} = -\frac{200 \cdot (-0,31)}{(-0,31)^2 + (2,55)^2} = \frac{-62}{0,10 + 6,50} = \frac{62}{6,6} = 9,39$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{cx}{100}\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{(3,03)^2} + \frac{y^2}{(2,23)^2} \cdot \left(1 + \frac{4,34}{100}x\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{9,18} + \frac{y^2}{4,97} \cdot \left(1 + 0,0434x\right) = 1$$

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{9,18} + \frac{y^2}{4,97} \cdot \left(1 + 0,0434x\right) = 1}}$$

$$\begin{aligned} a &= 3,03 \text{ cm} \\ b &= 2,23 \text{ cm} \\ m &= -0,2 \text{ cm} \\ c &= 4,34 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$c = -\frac{200m}{m^2 + a^2} = -\frac{200 \cdot (-0,2)}{(-0,2)^2 + (3,03)^2} = \frac{-40}{0,04 + 9,18} = \frac{40}{9,22} = 4,34$$

Priloga 4: Izračun konstante c pri merjenju s kljunastim merilom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{cx}{100}\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{(2,55)^2} + \frac{y^2}{(2)^2} \cdot \left(1 + \frac{17,76}{100}x\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{6,50} + \frac{y^2}{4} \cdot (1 + 0,18x) = 1$$

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{6,50} + \frac{y^2}{4} \cdot (1 + 0,18x) = 1}}$$

$$\begin{aligned} a &= 2,55 \text{ cm} \\ b &= 2 \text{ cm} \\ m &= -0,61 \text{ cm} \\ c &= 17,76 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$c = -\frac{200m}{m^2 + a^2} = -\frac{200 \cdot (-0,61)}{(-0,61)^2 + (2,55)^2} = -\frac{-122}{0,37 + 6,50} =$$

$$= \frac{122}{6,87} \approx \underline{\underline{17,76}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{cx}{100}\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{(3,03)^2} + \frac{y^2}{(2,23)^2} \cdot \left(1 + \frac{4,56}{100}x\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{9,18} + \frac{y^2}{4,97} \cdot (1 + 0,05x) = 1$$

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{9,18} + \frac{y^2}{4,97} \cdot (1 + 0,05x) = 1}}$$

$$\begin{aligned} a &= 3,03 \text{ cm} \\ b &= 2,23 \text{ cm} \\ m &= -0,21 \text{ cm} \\ c &= 4,56 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$c = -\frac{200m}{m^2 + a^2} = -\frac{200 \cdot (-0,21)}{(-0,21)^2 + (3,03)^2} = -\frac{-42}{0,04 + 9,18} = \frac{42}{9,22} =$$

$$= \underline{\underline{4,56}}$$

Priloga 5: : Določanje krivulj s štirimi drsniki s pomočjo programa Geogebra

Vir fotografij (Valeriy, 2021))

