

»55. srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2021«

FORMULA ZA OBSEG ELIPSE

Matematika ali logika

Raziskovalna naloga

Avtorici: Ava Dukarič in Zoja Pleteršek

Mentorica: Polonca Križnič

II. gimnazija Maribor

Maribor, 2020/21

FORMULA ZA OBSEG ELIPSE

Matematika ali logika

Raziskovalna naloga

Avtorici: Ava Dukarič in Zoja Pleteršek

Mentorica: Polonca Križnič

II. gimnazija Maribor

KAZALO

1. POVZETEK	3
2. UVOD	4
3. HIPOTEZE	5
4. METODOLGIJA DELA	5
5. ZGODOVINA ELIPSE	6
5.1. ANTIČNA GRČIJA	6
5.2. KEPLER	7
6. ELIPSA	8
6.1. ENAČBA ELIPSE	8
6.2. ELIPSA KOT LINEARNA TRANSFORMACIJA KROŽNICE	10
7. FORMULE ZA OBSEG ELIPSE	10
7.1. NAJINE FORMULE ZA OBSEG ELIPSE	11
7.1.1. <i>Formula aritmetične sredine velike in male polosi</i>	13
7.1.2. <i>Formula geometrične sredine velike in male polosi</i>	17
7.1.3. <i>Formula kvadratne sredine velike in male polosi</i>	20
7.2. NAPAKE IZRAČUNA NAJINIH FORMUL ZA VELIKA RAZMERJA	23
7.3. FORMULA PETIN	25
7.4. RAMANUJANOVA FORMULA ZA OBSEG ELIPSE	29
7.5. IZRAČUN OBSEGA ELIPSE Z UPORABO INTEGRALA	29
8. RAZPRAVA	31
8.1. UGOTOVITVE	31
8.2. VREDNOTENJE HIPOTEZ	32
8.3. NADALJNJE RAZISKOVANJE TEMATIKE	33
9. ZAKLJUČEK	34
10. DRUŽBENA ODGOVORNOST	34
11. VIRI IN LITERATURA	35

KAZALO SLIK:

<i>Slika 1: Elipsa.....</i>	<i>8</i>
<i>Slika 2: Gorišča elipse v koordinatnem sistemu.....</i>	<i>9</i>
<i>Slika 3: Obseg kroga</i>	<i>11</i>
<i>Slika 4: Obseg elipse 1</i>	<i>12</i>
<i>Slika 5: Obseg elipse 2</i>	<i>12</i>
<i>Slika 6: Obseg elipse 3</i>	<i>13</i>
<i>Slika 7: Obseg elipse 4</i>	<i>13</i>

KAZALO GRAFOV:

<i>Graf 1: Napaka, ki jo pri računanju obsega elipse naredi formula aritmetične sredine velike in male polosí.....</i>	<i>17</i>
<i>Graf 2: Napaka, ki jo pri računanju obsega elipse naredi formula geometrične sredine velike in male polosí.....</i>	<i>19</i>
<i>Graf 3: Napaka, ki jo pri računanju obsega elipse naredi formula kvadratne sredine velike in male polosí.....</i>	<i>22</i>
<i>Graf 4: Primerjava napak, ki jih naredijo formule</i>	<i>22</i>
<i>Graf 5: Primerjava napak, ki jih naredijo formule pri velikih razmerjih med polosema</i>	<i>24</i>
<i>Graf 6: Napaka, ki jo pri računanju elipse naredi formula petin</i>	<i>27</i>
<i>Graf 7: Primerjava napak, ki jih naredijo formule sredine in formula petin.....</i>	<i>28</i>
<i>Graf 8: Primerjava napak formul sredin in formule petin za obseg elipse pri velikih razmerjih</i>	<i>28</i>

KAZALO TABEL:

<i>Tabela 1: Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo aritmetične sredine</i>	<i>15</i>
<i>Tabela 2: Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo geometrične sredine.....</i>	<i>17</i>
<i>Tabela 3: Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo kvadratne sredine</i>	<i>20</i>
<i>Tabela 4: Napaka ki jo pri izračunu obsega naredijo formule pri velikih razmerjih</i>	<i>23</i>
<i>Tabela 5: Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo petin... ..</i>	<i>25</i>

1. POVZETEK

Johannes Kepler je leta 1609 objavil svoje spoznanje, da se planeti gibljejo okoli sonca po elipsah. V tej raziskovalni nalogi se bova ukvarjali s tem, kolikšno pot ob tem opravijo - torej kako izračunati obseg elipse. Glede na to, da je formula za ploščino elipse ($S = ab\pi$) podobna formuli za ploščino kroga ($S = \pi r^2$) in je krožnica le poseben primer elipse ($a = b = r$), bova raziskali ali obstaja tudi podobnost med formulama za obseg ene in druge krivulje. V učbeniku 3. letnika gimnazije namreč formule za obseg elipse ni bilo mogoče zaslediti. To bi lahko pomenilo dvoje, da je formula kompleksna (težka, zapletena) ali pa je morda sploh ni? To si sicer težko predstavljava. Raziskali bova, kako so torej določili oziroma izračunali dolžino tira Zemlje in drugih orbit. Preden se bova lotili reševanja problema, bova poiskali literaturo, da se seznaniva s teoretično osnovo. V raziskovalnem delu pa se bova poslužili matematičnih računalniških programov ter drugih pripomočkov in metod.

Zahvala

Profesorici, ki naju navdušuje nad matematiko.

Mentorici, ki naju je usmerjala in si vedno vzela čas, ne glede na to ob kateri uri sva se obrnili nanjo.

2. UVOD

Pred začetkom šolskega leta sva v učbeniku brskali, kaj vse naju čaka v tretjem letniku pri pouku matematike. Hitro sva ugotovili, da bomo kar nekaj časa posvetili geometriji, kjer bomo računali obsege in ploščine likov ter površine in prostornine teles. Ko sva prišli do poglavja o stožnicah sva opazili, da pri enačbah elipse manjka formula za njen obseg. Zanimalo naju je zakaj je temu tako. Formula za njeno ploščino je zelo podobna formuli za ploščino kroga. Ali je taka podobnost tudi pri obsegu? Kako potemtakem računajo pot, ki jo planeti opravijo okoli sonca? Posledično sva prišli na idejo, da bi lahko iz tega vprašanja naredili raziskovalno nalogo ter s tem predlogom odšli do profesorice matematike, ki nama je z veseljem priskočila na pomoč.

Temeljni cilji najine naloge so torej poiskati točno formulo za obseg elipse, če ta seveda obstaja, oziroma raziskati, kako so v preteklosti in kako zdaj računamo njen obseg. Kako je Kepler izračunal dolžino Zemljinega tira? Ker pa predvidevava, da točna formula ne obstaja oziroma je zelo kompleksna, bova tudi sami skušali najti formulo, ki da najustreznejši približek obsega elipse in bi teoretično lahko bila primerna za matematični učbenik tretjega letnika gimnazijskega programa.

3. HIPOTEZE

Za kvalitetno opravljeno raziskovalno delo sva svoje cilje in temeljna vprašanja morali urediti v jasne hipoteze. Te nama bodo skozi nalogo omogočile, da se drživa rdeče niti naloge in prideva do jasnih ugotovitev. Zato sva se pred začetkom raziskovanja posvetovali z mentorico in skupaj smo zasnovali 5 hipotez, ki temeljijo zgolj na najini intuiciji in dosedanjem znanju o elipsi:

1. Formula za obseg elipse ne obstaja ali pa je prekompleksna za srednješolski učbenik.
2. Matematiki so v preteklosti poskušali najti formulo za obseg elipse in so našli metode za zelo dobre približke obsega.
3. Krožnica je poseben primer elipse, zato ima pri obsegu elipse nekakšno vlogo tudi iracionalno število π .
4. Če v formuli, ki predstavlja približek za obseg elipse, povečujemo razmerje med polosema, se povečuje tudi napaka.
5. Keplerjev izračun dolžine Zemljinega tira je precej nenatančen, kajti takratno znanje o elipsi in predvsem takratna tehnologija točnega izračuna nista omogočala.

4. METODOLGIJA DELA

Pred raziskovanjem sva si naredili načrt dela. Odpravili sva se v knjižnico in poiskali vso potrebno literaturo. Zaradi trenutne situacije so nama v veliko pomoč bili tudi spletni viri. Najprej sva raziskali, kaj vse o sami elipsi in njenem obsegu že vemo, torej kakšna je zgodovina elipse in njene teoretične osnove. Nato sva se s pomočjo interaktivnega programa za risanje grafov GeoGebra primerjali in računali napake najinih formul za obseg. Ugotovljene rezultate in napake sva nato s pomočjo programa Excel predstavili v tabelah in narisali grafe.

5. ZGODOVINA ELIPSE

5.1. Antična Grčija

Začetki študija stožnic segajo v antično Grčijo, natančneje 360-350 let pr. n. št. Stožnice so bile namreč odkrite naključno pri iskanju rešitve problema podvojitve kocke. Problem podvojitve kocke oz. delski problem je povezan z legendo o povečanju oltarja boga Apolona, saj bi se na tak način znebili kuge. Apolonov oltar, ki je imel obliko kocke, bi morali povečati tako, da bo njegova prostornina dvakratnik prvotne. Pri tem mora oltar ohraniti svojo obliko. Podatke navedene v tem odstavku sva našli v diplomskih nalogah (Mandl Polona, 2015) in (Milinković Dijana, 2016).

Če želimo podvojiti volumen kocke moramo vsak njegov rob povečati za faktor $\sqrt[3]{2}$. Tukaj pa se je pojavil problem, saj konstrukcija tega števila z neoznačenim ravnilom in šestilom ni bila mogoča. Menajhmos (380-320 pr. n. št), grški geometer, je pri problemu podvajanja naletel na enačbe oziroma sistem enačb, katere rešitve so presek parabole in enakostranične hiperbole ter dveh parabol. Ti krivulji še takrat namreč nista bili poznani. S tem je torej odkril elipso, parabolo in hiperbolo. Krivulje je dobil s prerezom stožca, zato tudi njihovo ime stožnice. (Milinković Dijana, 2016).

Stari Grki so na začetku poznali le pokončne stožce, katere so delili na pravokotne, ostrokotne ter topokotne – torej glede na kot pri vrhu stožca. Evklid (365-275 pr. n. št.), grški matematik, ki je sicer najbolj znan po delu Elementi (13 knjig, ki predstavljajo osnovo geometrije), je v svojih štirih knjigah Stožnice opisal stožnice, ki jih dobimo, ko različne stožce presekamo z ravnino, pravokotno na njegovo stranico. V knjigah je posamezne stožnice tudi poimenoval; elipsa je bila presek ostrokotnega stožca, parabola presek pravokotnega stožca, hiperbola pa presek topokotnega stožca. Kot veliko del grških matematikov in fizikov, so tudi omenjene knjige izgubljene oz. niso ohranjene v prvotni obliki. Veliko splošnih lastnosti stožnic je od Evklida prevzel antični matematik Arhimed (285-212 pr. n. št.). Ta je elipsi pripisal nekaj novih pomembnih lastnosti. Glavni osi v elipsi je poimenoval diametra, in sicer večji in manjši. (Milinković Dijana, 2016)

Pomemben starogrški matematik, ki je naredil velik napredek na področju stožnic, je Apolonij iz Prege. Ta je objavil osem knjig z naslovom O stožnicah. Prve štiri knjige so bile namenjene

splošni rabi, saj so vsebovale osnovne definicije in trditve. Predstavljale naj bi dopolnitev Evklidovih štirih knjig. Naslednje tri knjige so bile bolj specializirane, osma pa se je izgubila. Izvor imena gorišče – točka, v kateri gori, bi naj domnevno bil plod Apolonijeve ugotovitve, da se žarek, ki ga pošljemo skozi gorišče eliptično oblikovanega zrcala, odbije v drugo gorišče. Tudi podatki iz preostalih odstavkov so prevzeti iz diplomske naloge (Milinković Dijana, 2016).

5.2. Kepler

Johannes Kepler (1571-1630), nemški astronom, je pri popravljanju in dopolnjevanju teorij poljskega astronoma Nikolaja Kopernika (heliocentrični sistem¹) prišel do ugotovitve, da se planeti gibljejo okoli sonca po eliptični tirnici, pri čemer je sonce v enem od gorišč te elipse. Ta trditev je ena izmed Keplerjevih zakonov.

(Westman, 2020)

Čeprav se je trudil, da bi dokazal, da se planeti gibljejo po krožnicah, so ga vsi računi in opazovanja prepričali nasprotno. S to idejo je bil prvi, ki je po starih Grkih ponovno obudil starogrško znanje o stožnicah. Keplerjev pojem fizične astronomije je odpravil nov problem za druge pomembne graditelje svetovnih sistemov iz 17. stoletja, med katerimi je bil najbolj znan Newton. Navedene podatke sva našli na spletni enciklopediji Britanica (Westman, 2020).

¹ Sonce je gravitacijsko središče osončja, vsi ostali planeti se gibljejo okoli njega

6. ELIPSA

Elipsa je množica točk v ravnini, za katere je vsota razdalj do dveh danih točk $F_1(-e, 0)$ in $F_2(e, 0)$ (gorišč elipse) konstantna. Ima dve simetrali oziroma simetrijski osi, katerih presečišče je središče elipse. Točke, kjer simetrali sekata elipso, so temena elipse (A, B, C, D). Razdalja od središča do bolj oddaljenega temena se imenuje velika polos elipse (a), razdalja od središča do bližjega temena pa se imenuje mala polos elipse (b).

Linearna ekscentričnost elipse (e) je razdalja od središča do gorišča elipse.

$$e^2 = a^2 - b^2; a > b \wedge a, b, c > 0$$

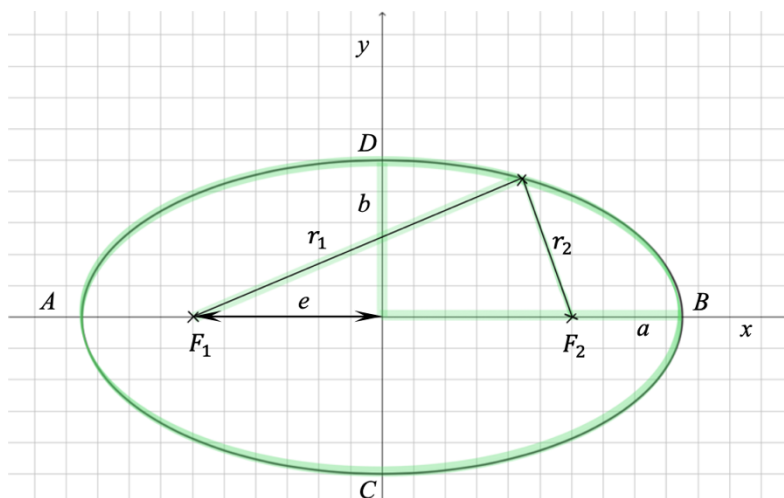
$$e^2 = b^2 - a^2; b > a \wedge a, b, c > 0$$

Numerična ekscentričnost elipse (ε) je razmerje med linearno ekscentričnostjo in veliko polosjo elipse. Vedno leži na intervalu $[0, 1)$ in nam pove, kako sploščena je elipsa.

$$\varepsilon \cong 0 \rightarrow \text{elipsa je po obliki podobna krogu}$$

$$\varepsilon \approx 1 \rightarrow \text{elipsa je po obliki zelo sploščena}$$

Podatki so prevzeti iz učbenika Spatium Novum (Pavlič, Rugelj, Šparovec, Kavka, 2013)



Slika 1: Elipsa.

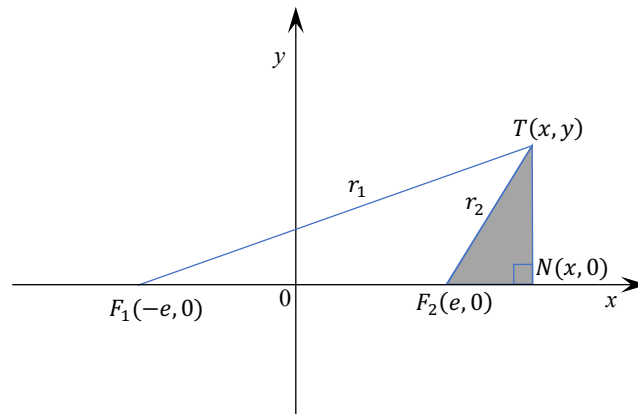
6.1. Enačba elipse

Kot sva že omenili, je elipsa v matematiki sklenjena ravninska krivulja oziroma množica točk v ravnini, za katere je vsota razdalj (r_1 in r_2) od dveh fiksnih točk F_1 , F_2 (gorišč) konstanta.

$$r_1 + r_2 = 2a$$

(Glej Slika 1: Elipsa)

Če središče elipse postavimo v središče koordinatnega sistema, potem lahko izpeljemo tudi njeno enačbo.



Slika 2: Gorišča elipse v koordinatnem sistemu.

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a / 2$$

$$2x^2 + 2e^2 + 2y^2 + 2\sqrt{(x^2 + e^2 + y^2 + 2xe)(x^2 + e^2 + y^2 - 2xe)} = 4a^2 / 2$$

$$x^2 + e^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + e^2 + y^2 + 2xe)(x^2 + e^2 + y^2 - 2xe)} = 2a^2$$

V enačbo vpeljemo novo spremenljivko K ; $K = x^2 + e^2 + y^2$

$$\sqrt{(K + 2xe)(K - 2xe)} = 2a^2 - K / 2$$

$$K^2 - 4x^2e^2 = 4a^4 - 4a^2K + K^2$$

$$4x^2e^2 - 4a^2K + 4a^4 = 0 / : 4$$

Odpravimo začasno spremenljivko K

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2e^2 = 0$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 - a^2(a^2 - e^2) = 0 / ; a > e \rightarrow a^2 > e^2 \dots; b^2; a^2 - e^2 = b^2$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \rightarrow \text{enačba elipse s središčem v koordinatnem izhodišču}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \rightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Podatki so prevzeti iz učbenika Spatium Novum (Pavlič, Rugelj, Šparovec, Kavka, 2013)

6.2. Elipsa kot linearna transformacija krožnice

Povezava med elipso in krožnico je opazna že v dejstvu, da lahko elipso v koordinatni sistem narišemo kot linearno transformacijo krožnice s polmerom a . In sicer tako, da krožnico z enačbo $x^2 + y^2 = a^2$ v smeri ordinatne osi raztegnemo s faktorjem $k = \frac{b}{a}$, pri čemer sta a in b pozitivni števili.

Torej ko točko $T(x, y)$ preslikamo z raztegom za faktor $k = \frac{b}{a}$ v smeri ordinatne osi, njena abscisa ostane nespremenjena, ordinato pa pomnožimo s faktorjem k . Tako dobimo novo točko T' s kordinatama x' in y' za kateri velja:

$$x' = x \text{ in } y' = ky = \frac{b}{a}y$$

Za nadaljnjo izpeljavo transformacije moramo iz zgornjih enačb izraziti x in y in ju vstaviti v enačbo krožnice $x^2 + y^2 = a^2$.

Torej:

$$\begin{aligned}x &= x' \text{ in } y = \frac{a}{b}y' \\x'^2 + \left(\frac{a}{b}y'\right)^2 &= a^2 : a^2 \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{a^2 y'^2}{b^2 a^2} &= 1\end{aligned}$$

Enačbo le še do konca uredimo in opustimo črtice:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Krivulja, ki nastane s raztegom krožnice za faktor $k = \frac{b}{a}$ je torej res elipsa.

7. FORMULE ZA OBSEG ELIPSE

Pri iskanju formul za obseg elipse sva se zgledovali po formuli za obseg kroga. Zakaj? Formula za ploščino kroga je $S = \pi r^2$, pri čemer r predstavlja polmer kroga. Pri formuli za ploščino elipse pa računamo namesto kvadrata polmera produkt dolžine velike (a) in male polosi (b); $S = ab\pi$. Formula za ploščino kroga je torej le variacija formule za ploščino elipse, pri kateri je $a = b$.

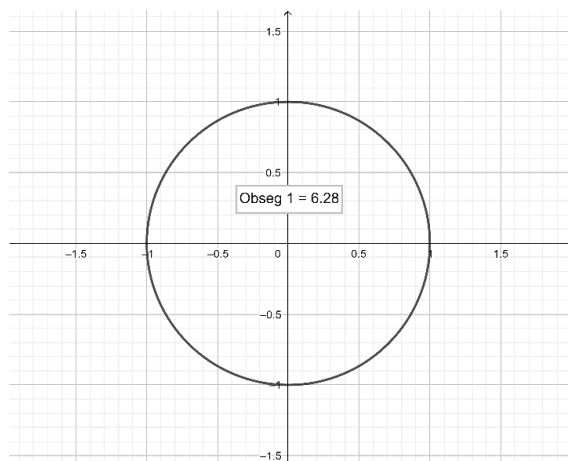
Drugače pa je pri obsegu. Ta se pri krogu izračuna kot $o = 2\pi r$. V tej formuli nastopa le ena spremenljivka, elipsa pa je določena z dvema osema. Kaj bi potem izbrali namesto polmera? Polos a ali b ali kakšno njuno povprečje? ... Najino temeljno raziskovalno vprašanje je: s čim v formuli za obseg kroga nadomestiti polmer r , da dobimo formulo za obseg elipse?

Poskusili bova najti čim ustrežnejši »nadomestek« za polmer r , pri čemer bova primerjali obseg izračunan z najino formulo in tisto, ki ga izračuna interaktivni matematični program GeoGebra. Prav tako bova v virih poiskali formule, ki so jih našli drugi matematiki in ki se sedaj uporabljajo za najnatančnejši izračun obsega.

7.1. Najine formule za obseg elipse

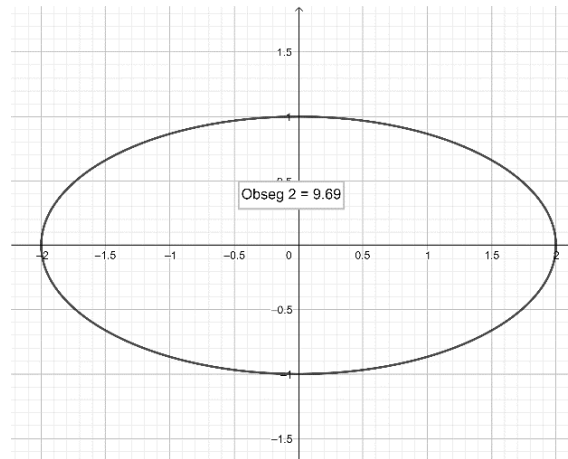
Izbrali sva različne elipse, katerih računalniško izračunane obsege sva primerjali z tistimi, ki sva jih dobili iz najinih formul. Prva elipsa (*Glej Slika 3*), katere velika polos je enaka mali $a = b = 1$, bo krožnica. Pričakujeva, da se bodo pri krožnici vsi izračunani obsegi med seboj skladali, saj je formula za obseg kroga ($o_{kroga} = 2\pi r$) najino izhodišče. Vsako naslednjo elipso pa bova raztegnili za 0,1 enote v smeri polosi a , medtem bo b ves čas konstanten ($b = 1$). Tako bova dobili različna razmerja med polosema in bova lahko bolje primerjali obsege ter izračunali odstopanja najinih formul. Prav tako bova s tem ugotovili katera formula je najustreznejša pri različnih razmerjih med polosema a in b .

S programom Geogebra sva za lažjo predstavo narisali 5 elips, katerih razmerja se razlikujejo za eno enoto in k slikam podali tudi z istim programom izračunane obsege.



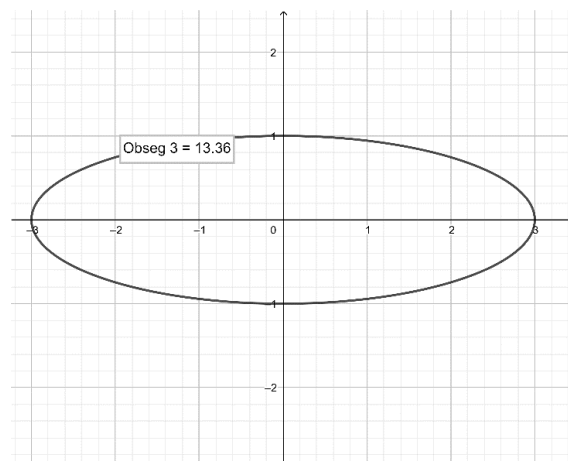
Slika 3: Obseg kroga.

Obseg, ki ga je program GeoGebra izračunal za krog, je 6,28, kot je razvidno iz zgornje slike. Rezultate sva se odločili za večjo preglednost zaokroževati na dve decimalni mesti natančno. Sklepava, da bo to dovolj, saj pričakujemo opazna odstopanja. Zagotovo bi za natančnejše izračune bilo dobro zaokroževati na več decimalnih mest.



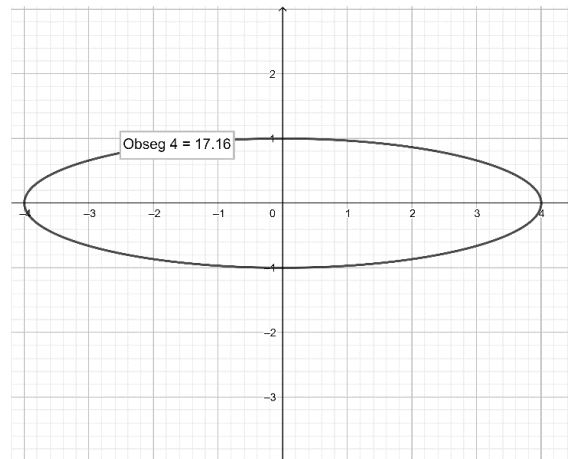
Slika 4: Obseg elipse 1.

Na zgornji sliki je elipsa, katere velika in mala polos sta v razmerju 2 : 1 ($a = 2, b = 1$). Program GeoGebra je za zgornjo elipso izračunal obseg, ki meri 9,69.



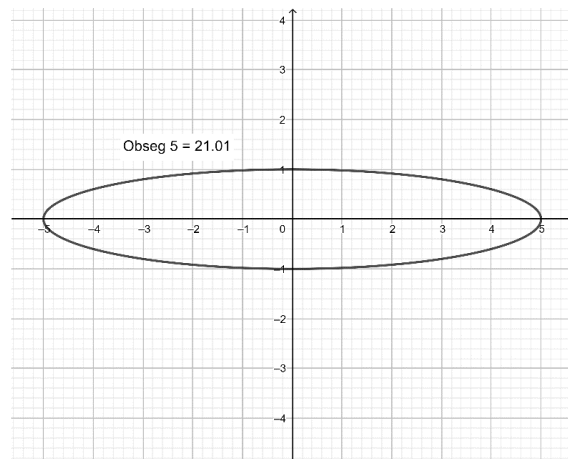
Slika 5: Obseg elipse 2.

Razmerje velike in male polosi na zgornji elipsi (Slika 5) je 3 : 1 ($a = 3, b = 1$). Program GeoGebra je za zgornjo elipso izračunal obseg, ki je enak 13,36.



Slika 6: Obseg elipse 3.

Razmerje velike in male polosi na *Sliki 6* je $4 : 1$ ($a = 4, b = 1$) Program GeoGebra je za zgornjo elipso izračunal obseg, ki meri 17,16.



Slika 7: Obseg elipse 4.

Razmerje med veliko in malo polosjo zadnje elipse (*Slika 7: elipsa 4*) je $5 : 1$ ($a = 5, b = 1$). Program GeoGebra je za zgornjo elipso izračunal obseg, ki meri 21,01.

7.1.1. Formula aritmetične sredine velike in male polosi

Najina prva ideja je krogov polmer »nadomestiti« z aritmetično sredino oz. povprečno vrednostjo velike in male polosi. V tem primeru formula za obseg elipse izgledala tako:

$$o \approx 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

Z zgornjo formulo sva nato najprej izračunali obsege elips, ki sva jih narisali s programom GeoGebra in dobili naslednje rezultate;

1. Krog

$$a = b = 1$$

$$o \approx 2\pi \left(\frac{1+1}{2} \right) \approx 6,28$$

Obseg izračunan z zgornjo formulo se sklada s obsegom, ki ga je izračunal program GeoGebra.

2. Elipsa 1; $a : b = 2 : 1$

$$a = 2; b = 1$$

$$o \approx 2\pi \left(\frac{2+1}{2} \right) \approx 9,43$$

Obseg elipse, katere polosi sta v razmerju 2 : 1, po najinem izračunu znaša 9,43, obseg ki ga je izračunal program pa 9,69. Relativna napaka² rezultata je zaokroženo 2,72%.

3. Elipsa 2 $a : b = 3 : 1$

$$a = 3; b = 1$$

$$o \approx 2\pi \left(\frac{3+1}{2} \right) \approx 12,57$$

Obseg elipse, katere polosi sta v razmerju 3 : 1, po najinem izračunu znaša 12,57, obseg ki ga je izračunal program pa 13,36. Odstopanje rezultata je zaokroženo 5,97%.

4. Elipsa 3; $a : b = 4 : 1$

$$a = 4; b = 1$$

$$o \approx 2\pi \left(\frac{4+1}{2} \right) \approx 15,71$$

² Relativno napako sva računali po formuli; $relativna\ napaka = \frac{|obseg\ GeoGebra - "najin\ obseg|}{obseg\ GeoGebra}$

Obseg elipse, katere polosi sta v razmerju 4 : 1, po najinem izračunu znaša 15,71, obseg ki ga je izračunal program pa 17,16. Odstopanje rezultata je zaokroženo 8,44%.

5. Elipsa 4; $a : b = 5 : 1$

$$a = 5; b = 1$$

$$o \approx 2\pi \left(\frac{5+1}{2} \right) \approx 18,85$$

Obseg elipse, katere polosi sta v razmerju 5 : 1, po najinem izračunu znaša 18,85, obseg ki ga je izračunal program pa 21,01. Odstopanje rezultata je zaokroženo 10,28%.

Po postopku, ki je prikazan na zgornjih primerih sva izračunali tudi obsege in napake izračunov za vmesna razmerja. Rezultate sva zbrali v *Tabeli 1*.

Tabela 1: *Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo aritmetične sredine*

	O_{GG}	$O_{\frac{a+b}{2}}$	Napaka [%]
1 : 1	6,28	6,28	0,00
1,1 : 1	6,60	6,60	0,00
1,2 : 1	6,93	6,91	0,20
1,3 : 1	7,26	7,23	0,42
1,4 : 1	7,59	7,54	0,69
1,5 : 1	7,93	7,85	0,99
1,6 : 1	8,28	8,17	1,32
1,7 : 1	8,63	8,48	1,66
1,8 : 1	8,98	8,80	2,01
1,9 : 1	9,33	9,11	2,37
2 : 1	9,69	9,42	2,72
2,1 : 1	10,05	9,74	3,08
2,2 : 1	10,41	10,05	3,43
2,3 : 1	10,77	10,37	3,77
2,4 : 1	11,14	10,68	4,11
2,5 : 1	11,51	11,00	4,44
2,6 : 1	11,88	11,31	4,76

2,7 : 1	12,25	11,62	5,08
2,8 : 1	12,62	11,94	5,39
2,9 : 1	13,00	12,25	5,68
3 : 1	13,36	12,57	5,97
3,1 : 1	13,74	12,88	6,26
3,2 : 1	14,12	13,29	6,53
3,3 : 1	14,49	13,51	6,80
3,4 : 1	14,87	13,82	7,05
3,5 : 1	15,25	14,14	7,30
3,6 : 1	15,63	14,45	7,55
3,7 : 1	16,01	14,77	7,78
3,8 : 1	16,39	15,08	8,01
3,9 : 1	16,77	15,39	8,23
4 : 1	17,16	15,71	8,44
4,1 : 1	17,54	16,02	8,65
4,2 : 1	17,92	16,34	8,86
4,3 : 1	18,31	16,65	9,05
4,4 : 1	18,69	16,96	9,24
4,5 : 1	19,08	17,28	9,43
4,6 : 1	19,46	17,59	9,61
4,7 : 1	19,85	17,91	9,79
4,8 : 1	20,24	18,22	9,96
4,9 : 1	20,62	18,54	10,12
5 : 1	21,01	18,85	10,28

Legenda:

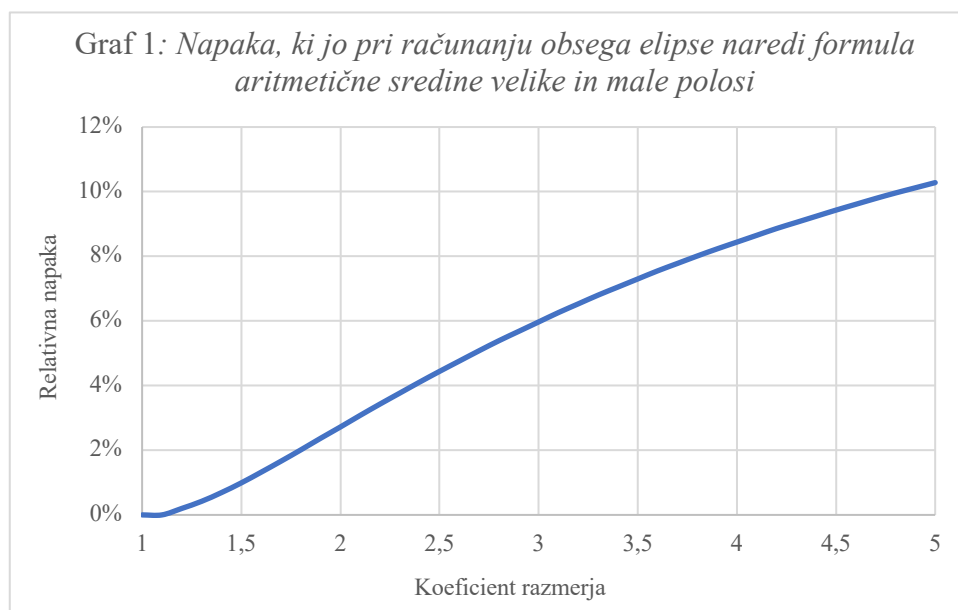
o_{GG} = Obseg, ki ga poda program GeoGebra

$\frac{o_{a+b}}{2}$ = Obseg, izračunan s formulo, kjer r nadomesti aritmetična sredina polosi a in b

Napaka [%] = Odstopanje rezultatov najinih formul od rezultatov programa Geogebra

V *Tabeli 1* so zbrani podatki, ki sva jih izračunali oziroma pridobili s programom Geogebra. Kljub temu, da je že iz tabele razvidno, da napaka z večanjem razmerja med polosema narašča, sva za večjo preglednost zbrane podatke prikazali tudi na *Grafu 1*.

Iz njega je lepo razvidno, da napaka izračunanega obsega in razmerje med polosema naraščata skoraj sorazmerno. Zaključiva lahko, da je ta formula primerna le, ko je razmerje med polosema a in b razmeroma majhno.



7.1.2. Formula geometrične sredine velike in male polosi

Ker formula, pri kateri uporabiva aritmetično sredino velike in male polosi pri večjih razmerjih ni najbolj natančna, sva prišli na idejo, da bi namesto aritmetične uporabili geometrično sredino. Ta je koren produkta števil a in b , saj sta v tem primeru obe števili pozitivni. Formula za obseg elipse bi po tej formuli izgledala tako:

$$o \approx 2\pi\sqrt{ab}$$

Tako kot za formulo, pri kateri sva namesto r uporabili aritmetično sredino polosi, sva tudi za to izračunali obsege pri različnih razmerjih med polosema in napake, ki jih najina formula naredi. Rezultate izračunov sva najprej zbrali v Tabeli 2.

Tabela 2: Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo geometrične sredine

	o_{GG}	$o_{\sqrt{ab}}$	Napaka [%]
1 : 1	6,28	6,28	0,00
1,1 : 1	6,60	6,59	0,17

»Mladi za napredek Maribora«

1,2 : 1	6,93	6,88	0,62
1,3 : 1	7,26	7,16	1,27
1,4 : 1	7,59	7,43	2,08
1,5 : 1	7,93	7,70	2,99
1,6 : 1	8,28	7,95	3,98
1,7 : 1	8,63	8,19	5,02
1,8 : 1	8,98	8,43	6,09
1,9 : 1	9,33	8,66	7,12
2 : 1	9,69	8,89	8,28
2,1 : 1	10,05	9,11	9,38
2,2 : 1	10,41	9,32	10,47
2,3 : 1	10,77	9,53	11,55
2,4 : 1	11,14	9,73	12,62
2,5 : 1	11,51	9,93	13,66
2,6 : 1	11,88	10,13	14,69
2,7 : 1	12,25	10,32	15,69
2,8 : 1	12,62	10,51	16,67
2,9 : 1	13,00	10,70	17,63
3 : 1	13,36	10,88	18,57
3,1 : 1	13,74	11,06	19,49
3,2 : 1	14,12	11,24	20,38
3,3 : 1	14,49	11,41	21,25
3,4 : 1	14,87	11,59	22,10
3,5 : 1	15,25	11,75	22,92
3,6 : 1	15,63	11,92	23,73
3,7 : 1	16,01	12,09	24,51
3,8 : 1	16,39	12,25	25,28
3,9 : 1	16,77	12,41	26,03
4 : 1	17,16	12,57	26,76
4,1 : 1	17,54	12,72	27,47
4,2 : 1	17,92	12,88	28,16
4,3 : 1	18,31	13,03	28,83
4,4 : 1	18,69	13,18	29,49

4,5 : 1	19,08	13,33	30,13
4,6 : 1	19,46	13,48	30,76
4,7 : 1	19,85	13,62	31,38
4,8 : 1	20,24	13,78	31,97
4,9 : 1	20,62	13,91	32,56
5 : 1	21,01	14,05	33,12

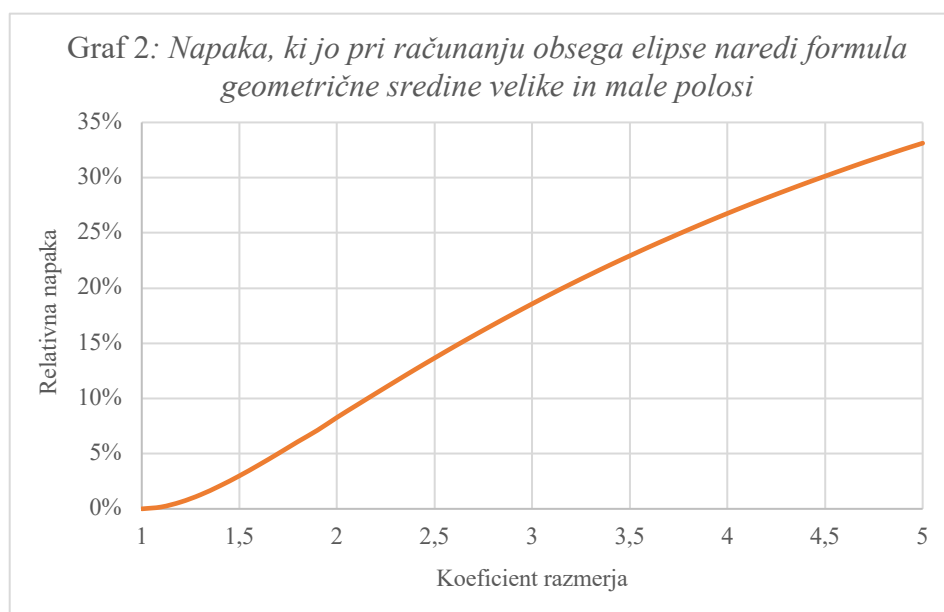
Legenda:

o_{GG} = Obseg, ki ga poda program GeoGebra

$o_{\sqrt{ab}}$ = Obseg, izračunan s formulo, kjer r nadomesti geometrična sredina polosi a in b

Napaka [%] = Odstopanje rezultatov najinih formul od rezultatov programa Geogebra

Za večjo preglednost sva ponovno narisali graf (*Graf 2*) odvisnosti relativne napake izračuna od koeficienta razmerja med polosema.



Ponovno se odstopanje povečuje z večanjem razmerja med a in b . Formula obsega z uporabo geometrične sredine velike in male polosi je veliko manj natančna kot formula na podlagi aritmetične sredine. Kot zanimivost lahko tukaj omeniva, da je formula z geometrično sredino ena od formul, ki jih je za izračune dolžin tirnic planetov uporabljal Johannes Kepler. Čeprav je vidno, da je formula precej nenatančna, njegovi izračuni niso imeli večje napake, saj je numerična ekscentričnost poti Zemlje okoli sonca majhna (0,0167) in je elipsa zelo podobna krogu.

7.1.3. Formula kvadratne sredine velike in male polosi

Še vedno meniva, da sta zgornji formuli premalo natančni. Zato bova formulo znova spremenili in uporabili še tretjo. Ta bo temeljila na kvadratni sredini velike in male polosi elipse. Kvadratna sredina je definirana kot kvadratni koren aritmetične sredine kvadratov. Nova formula posledično izgleda tako:

$$o \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Izračunali sva nove obsege in njihova odstopanja ter jih predstavili v spodnji tabeli in grafu.

Tabela 3: *Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo kvadratne sredine*

	o_{GG}	$o \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	Napaka [%]
1 : 1	6,28	6,28	0,00
1,1 : 1	6,60	6,60	0,00
1,2 : 1	6,93	6,94	0,21
1,3 : 1	7,26	7,29	0,42
1,4 : 1	7,59	7,64	0,68
1,5 : 1	7,93	8,01	0,97
1,6 : 1	8,28	8,38	1,28
1,7 : 1	8,63	8,76	1,59
1,8 : 1	8,98	9,15	1,91
1,9 : 1	9,33	9,54	2,21
2 : 1	9,69	9,93	2,54
2,1 : 1	10,05	10,33	2,85
2,2 : 1	10,41	10,74	3,15
2,3 : 1	10,77	11,14	3,43
2,4 : 1	11,14	11,55	3,70
2,5 : 1	11,51	11,96	3,97
2,6 : 1	11,88	12,38	4,22

»Mladi za napredek Maribora«

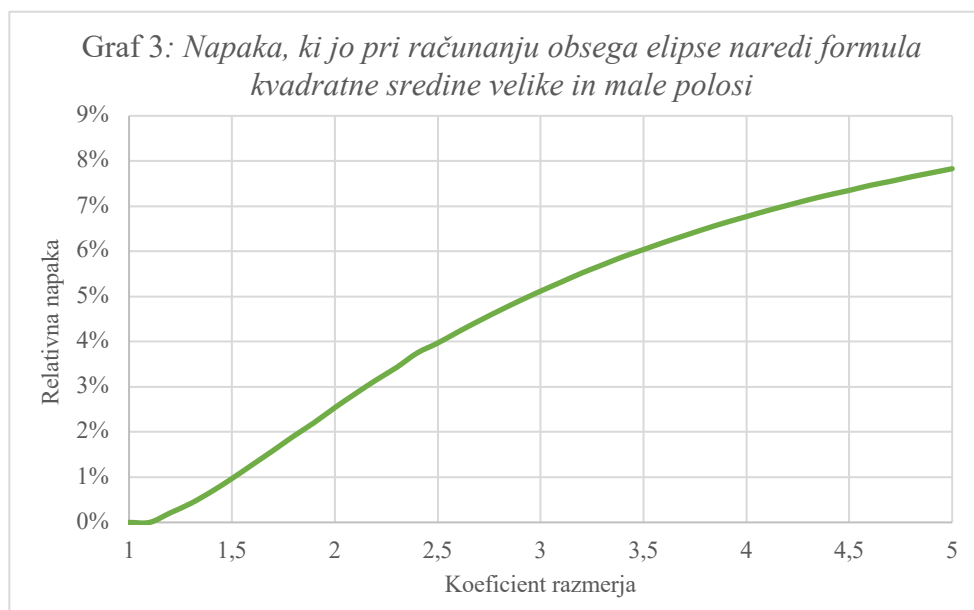
2,7 : 1	12,25	12,76	4,46
2,8 : 1	12,62	13,21	4,69
2,9 : 1	13,00	13,63	4,91
3 : 1	13,36	14,05	5,12
3,1 : 1	13,74	14,47	5,32
3,2 : 1	14,12	15,00	5,52
3,3 : 1	14,49	15,32	5,70
3,4 : 1	14,87	15,75	5,88
3,5 : 1	15,25	16,17	6,04
3,6 : 1	15,63	16,60	6,20
3,7 : 1	16,01	17,03	6,35
3,8 : 1	16,39	17,46	6,50
3,9 : 1	16,77	17,89	6,64
4 : 1	17,16	18,32	6,77
4,1 : 1	17,54	18,75	6,90
4,2 : 1	17,92	19,18	7,02
4,3 : 1	18,31	19,61	7,14
4,4 : 1	18,69	20,05	7,25
4,5 : 1	19,08	20,48	7,35
4,6 : 1	19,46	20,91	7,46
4,7 : 1	19,85	21,35	7,55
4,8 : 1	20,24	21,78	7,65
4,9 : 1	20,62	22,22	7,74
5 : 1	21,01	22,65	7,83

Legenda:

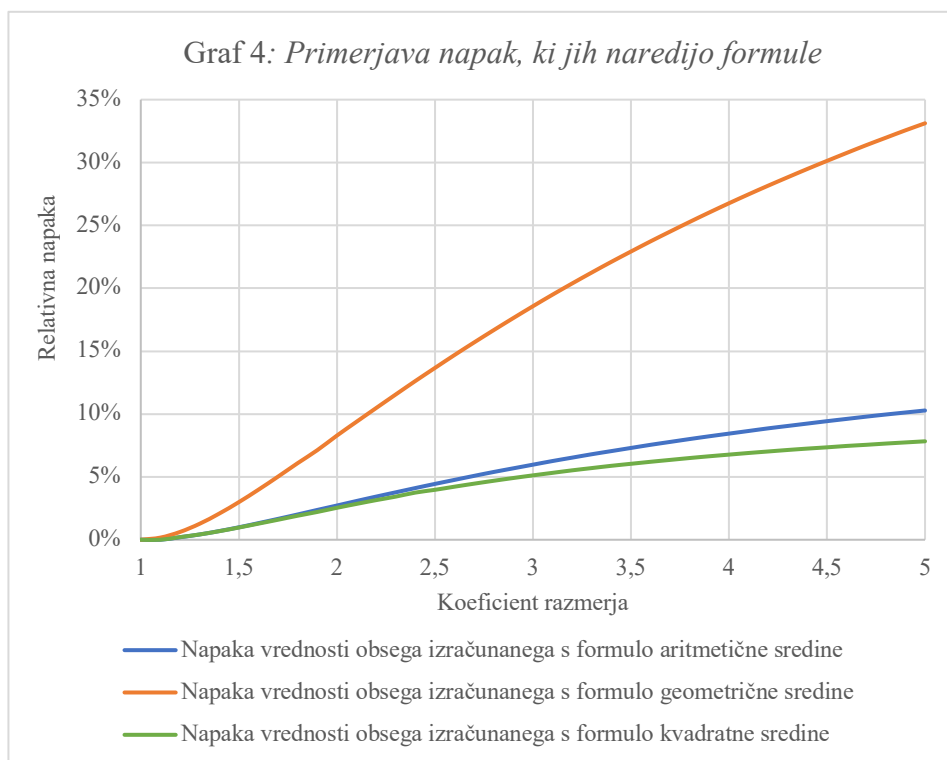
o_{GG} = Obseg, ki ga poda program GeoGebra

$o \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ = Obseg, izračunan s formulo, kjer r nadomesti kvadratna sredina polosi a in b

Napaka [%] = Odstopanje rezultatov najinih formul od rezultatov programa Geogebra



Kot pri prejšnjih formulah tudi pri tej iz Grafa 3 razvidno, da napaka izračuna narašča sorazmerno s sploščenostjo elipse, vendar je ta napaka v primerjavi z prejšnjima manjša (Glej Graf 1 in Graf 2). Tudi pri večjih razmerjih npr. 5 : 1 ne preseže 10 %, kar ne velja za nobeno od predhodnih formul. Za lažjo primerjavo »uspešnosti« najinih formul sva vse pridobljene podatke predstavili na Grafu 4.



Iz njega je razvidno, da pri vseh treh formulah odstopanje narašča z večanjem razmerja med polosema in da največjo napako naredi formula geometrične sredine, medtem ko sta napaki

formul aritmetične in kvadratne sredine relativno podobni. Kljub temu je povsem razvidno, da je od teh treh najnatančnejša formula kvadratne sredine. Formule za aritmetično, geometrično in kvadratno sredino vrednosti sva našli v matematični reviji Presek Milutinović, 2012).

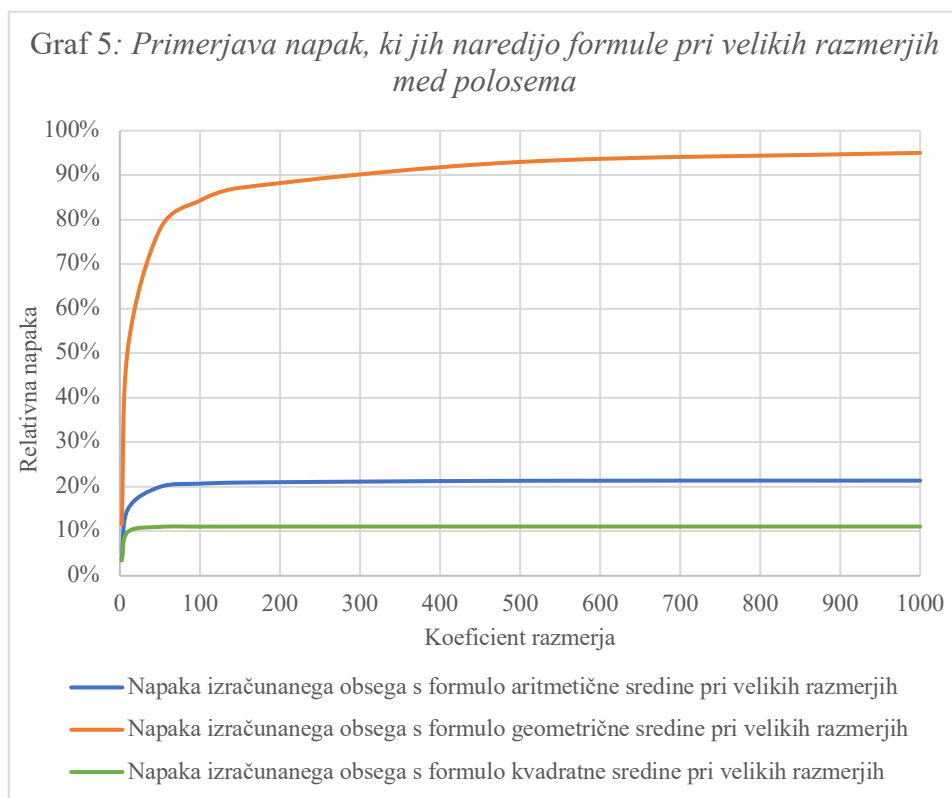
7.2. Napake izračuna najinih formul za velika razmerja

Iz podatkov, ki sva jih do sedaj pridobili je razvidno, da napaka pri izračunu narašča z velikostjo razmerja. Zato sva se vprašali: »Kaj pa se dogaja pri zelo velikih razmerjih?« Torej pri razmerjih kot je na primer 50 : 1, 100 : 1 ali celo 1000 : 1. Zanimalo naju je ali napaka res ves čas strogo narašča ali se njena rast na neki točki upočasni in če ja, kje je ta točka.

S pomočjo programa GeoGebra sva začeli preverjati napake posameznih enačb pri večjih razmerjih in opazovali kaj se z njimi dogaja. Podatke, ki sva jih s tem zbrali, sva se odločili za lažjo predstavo prikazati na *Grafu 5*, za lažjo preglednost pa še s *Tabelo 4*.

Tabela 4: Napaka ki jo pri izračunu obsega naredijo formule pri velikih razmerjih

Napaka ki jo pri izračunu obsega elipse naredi formula aritmetične sredine pri velikih razmerjih		Napaka ki jo pri izračunu obsega elipse naredi formula geometrične sredine pri velikih razmerjih		Napaka ki jo pri izračunu obsega elipse naredi formula kvadratne sredine pri velikih razmerjih	
razmerje	napaka	razmerje	napaka	razmerje	napaka
10 : 1	15,00%	10 : 1	51,11%	6 : 1	8,53%
30 : 1	15,04%	50 : 1	77,08%	8 : 1	9,40%
50 : 1	20,00%	100 : 1	84,30%	10 : 1	9,87%
100 : 1	20,70%	250 : 1	90,07%	20 : 1	10,67%
150 : 1	20,95%	500 : 1	92,98%	50 : 1	10,99%
1000 : 1	21,38%	1000 : 1	95,03%	1000 : 1	11,07%



Iz grafa in tabele je razvidno, da se napaka pri vseh treh formulah relativno hitro začne »umirjati« in narisane krivulje spominjajo na graf logaritemske funkcije. Napaka izračunana s formulo aritmetične sredine doseže navidezno konstantnost 21% pri razmerju 167 : 1, od razmerja 50 : 1 do tega trenutka zraste za 1,03%, do razmerja 1000 : 1 pa zraste le še za 0,38%. Napaka, ki jo pri izračunu dolžine obsega naredi formula geometrične sredine, je daleč največja, vendar se tudi ta okoli razmerja 500 : 1 z vrednostjo 92,98% umiri in do razmerja 1000 : 1 zraste le še za 2,05%. Najnatančnejša formula, in sicer formula kvadratne sredine, se tudi najhitreje in pri najnižji vrednosti umiri. Med razmerjema 10 : 1 in 1000 : 1 se napaka dvigne le za 1,2%. Pri razmerju 10 : 1 je 9,87% pri 1 : 1000 pa 11,07%, posledično sklepava, da se napaka, ki jo naredi formula »umiri« pri približno 11%. Za grobo aproksimacijo obsega elipse bi zadoščala zadnja formula.

7.3. Formula petin

Ker je še zmeraj napaka pri vseh treh formulah kar velika, sploh pri večjih razmerjih, sva tokrat obrali drugačno metodo in se lotili naključnega poskušanja svojih formul, ki bi bile dovolj enostavne za vsakdanjo uporabo, prav tako pa naredijo manjšo napako kot zgornje. Pomagali sva si s programom GeoGebra in sproti računali napake formul pri majhnih in večjih razmerjih. Pri tem sva naleteli na formulo, katere napaka ne presega 3,9%. Najprej se napaka z večanjem razmerij med polosema povečuje, ko pa doseže razmerje 2,3 : 1 ponovno pade in se pri razmerju 1000 : 1 »ustali« na 0,65 % (Glej Tabela 5) kar je v primerjavi z zgornjimi formulami precej natančnejše. Definirana pa je tako:

$$o \approx 2\pi \sqrt{\frac{2}{5} \cdot a^2 + \frac{3}{5} \cdot b^2},$$

pri čemer a vedno predstavlja večjo polos, kar je slabost te formule.

Tabela 5: Vpliv razmerja med polosema na napako izračunanega obsega s formulo petin

	O_{GG}	$O_{2\pi\sqrt{\frac{2}{5}a^2+\frac{3}{5}b^2}}$	Napaka [%]
1 : 1	6,28	6,28	0,00
1,1 : 1	6,60	6,54	0,90
1,2 : 1	6,93	6,81	1,62
1,3 : 1	7,26	7,10	2,19
1,4 : 1	7,59	7,39	2,64
1,5 : 1	7,93	7,70	2,99
1,6 : 1	8,28	8,01	3,26
1,7 : 1	8,63	8,33	3,47
1,8 : 1	8,98	8,65	3,62
1,9 : 1	9,33	8,98	3,73
2 : 1	9,69	9,32	3,81
2,1 : 1	10,05	9,66	3,86
2,2 : 1	10,41	10,01	3,88
2,3 : 1	10,77	10,35	3,89
2,4 : 1	11,14	10,71	3,88

»Mladi za napredek Maribora«

2,5 : 1	11,51	11,06	3,86
2,6 : 1	11,88	11,42	3,83
2,7 : 1	12,25	11,78	3,79
2,8 : 1	12,62	12,15	3,75
2,9 : 1	13,00	12,51	3,70
3 : 1	13,36	12,88	3,66
3,1 : 1	13,74	13,25	3,60
3,2 : 1	14,12	13,62	3,55
3,3 : 1	14,49	13,99	3,49
3,4 : 1	14,87	14,36	3,44
3,5 : 1	15,25	14,74	3,38
3,6 : 1	15,63	15,11	3,32
3,7 : 1	16,01	15,49	3,30
3,8 : 1	16,39	15,87	3,21
3,9 : 1	16,77	16,24	3,16
4 : 1	17,16	16,62	3,11
4,1 : 1	17,54	17,00	3,05
4,2 : 1	17,92	17,39	3,00
4,3 : 1	18,31	17,77	2,95
4,4 : 1	18,69	18,15	2,90
4,5 : 1	19,08	18,53	2,86
4,6 : 1	19,46	18,92	2,81
4,7 : 1	19,85	19,30	2,76
4,8 : 1	20,24	19,69	2,72
4,9 : 1	20,62	20,07	2,68
5 : 1	21,01	20,46	2,63
10 : 1	40,64	40,04	1,49
30 : 1	120,29	119,31	0,81
50 : 1	200,19	198,75	0,72
100 : 1	400,11	397,41	0,67
150 : 1	600,08	596,10	0,66
1000 : 1	4000,02	3973,84	0,65

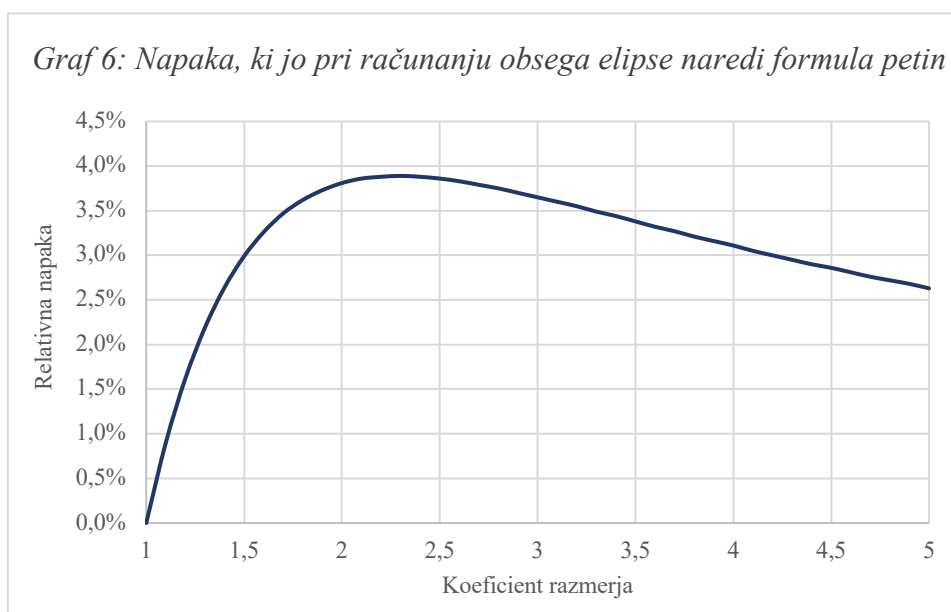
Legenda:

o_{GG} = Obseg, ki ga poda program GeoGebra

o $\sqrt{\frac{2}{5}a^2 + \frac{3}{5}b^2}$ = Obseg, izračunan s novo formulo

Napaka [%] = Odstopanje rezultatov najinih formul od rezultatov programa Geogebra

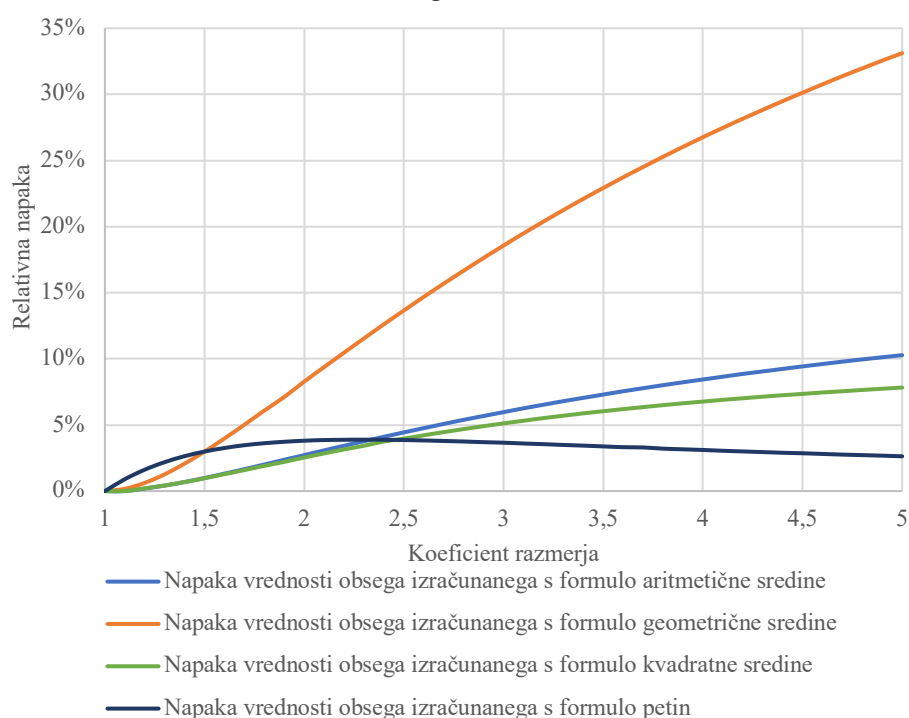
Iz *Tabele 5* in *Grafa 6* je razvidno, da napaka formule najprej z večanjem razmerja med polosema narašča, nato pa začne padati. Maksimum doseže pri razmerju 2,3 : 1 in sicer 3,89%, do razmerja 1000 : 1 pa pade že na 0,65%. V primerjavi s prejšnjimi formulami je zagotovo najnatančnejša, prav tako je dokaj preprosta.



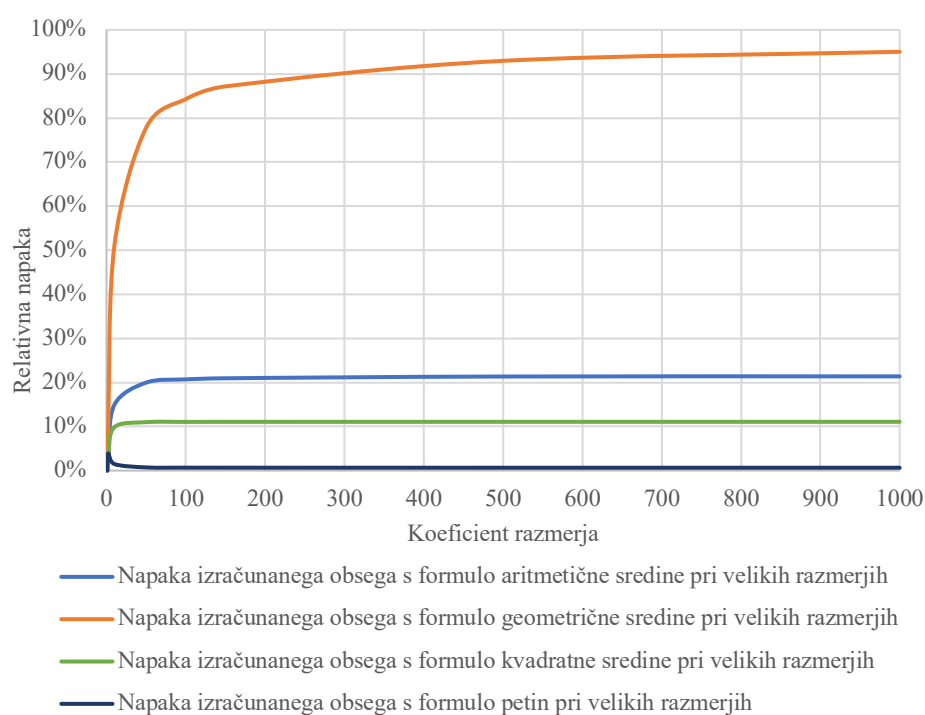
Na spodnjih grafih (*Graf 7* in *Graf 8*) je prikazana primerjava med vsemi štirimi formulami in primerjava med napakami prejšnjih formul in formulo petin pri večjih razmerjih. Vidimo lahko, da je za računanje obsega elipse pri večjih razmerjih ta formula daleč najnatančnejša. Tudi pri manjših ne odstopa veliko vendar je napaka, ki jo naredi do razmerja 1,4 : 1 največja. Na tem mestu jo »prehiti« napaka formule geometrične sredine, do razmerja 2,4 : 1 oz. 2,5 : 1 pa tudi napaki formule aritmetične in kvadratne sredine.

Formula petin je tudi edina pri kateri napaka z večanjem razmerja na neki točki začenja padati. To je izjemnega pomena predvsem zaradi tega, ker nama je do sedaj največjo težavo predstavljalo večanje napaka s povečevanjem razmerja. Rezultati pridobljeni s formulo petin, pa to težavo rešijo, sedaj lahko namreč dokaj natančno računama obsege najrazličnejših elips, z najrazličnejšimi razmerji med polosema.

Graf 7: Primerjava napak, ki jih naredijo formule sredine in formula petin



Graf 8: Primerjava napak formul sredin in formule petin za obseg elipse pri velikih razmerjih



7.4. Ramanujanova formula za obseg elipse

Eno najbolj natančnih formul za obseg elipse je iznašel indijski matematik Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920). Zaradi njene izjemne natančnosti ni smiselno računati odstopanj pri manjši razmerjih, saj bi za to potrebovali zelo veliko decimalnih mest. Zato sva odstopanje z programom GeoGebra izračunali le za razmerje 5: 1, pri čemer je bil obseg izračunan na 15 decimalnih mest natančno. Pri tem razmerju je napaka Ramanujanove formule le $8 \cdot 10^{-5} \%$. Kot pri najinih, tudi pri njegovi formuli odstopanje narašča s sploščenostjo elipse oz. z večanjem razmerja med polosema. Definirana pa je tako:

$$o \approx \pi(a + b) \left(1 + \frac{3\lambda^2}{10 + \sqrt{4 - 3\lambda^2}} \right),$$

$$\text{pri čemer je } \lambda = \frac{(a-b)}{(a+b)}.$$

Čudiva se temu, kako je lahko v takratnih časih, brez današnje tehnologije, prišel do tako neverjetno dobrega približka. Kje oziroma kako je dobil idejo za člene, ki se pojavljajo v formuli? V literaturi in na spletu odgovora na to vprašanje na žalost nisva našli. Predstavljene podatke sva pridobili iz spletnih strani (Cook, 2021) in (Roberts, 2021).

7.5. Izračun obsega elipse z uporabo integrala

Osnovo integralskega računa sta konec 17. stoletja postavila Isaac Newton in Gottfried Wilhem Leibniz. Slednje je omogočilo Fermatu in Hendrik van Heuraetu, da sta postavila temelj dolžine loka v integralski obliki, s čimer sta prva uspela izračunati dolžino elipse oziroma njen obseg. Če elipso postavimo v izhodišče koordinatnega sistema, jo abscisna in ordinatna os razdelita na štiri skladne dele.

Obseg elipse najlažje izračunamo v parametrični obliki s parametrom t . Dolžina krivulje $\mathcal{K}$, če je $\mathcal{K}$ podana parametrično, je torej:

$$l(\mathcal{K}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Kjer sta x in y enaka:

$$x = a \cos t \text{ in } y = b \sin t$$

velja: $0 \leq t \leq 2\pi$ in $a > b > 0$.

Njuna odvoda x' in y' sta enaka:

$$x' = -a \sin t \text{ in } y' = b \cos t$$

$$\begin{aligned} l(\mathcal{K}) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} \, dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \left(1 - \cos^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t\right)} \, dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \left(1 - \cos^2 t \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right)} \, dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \left(1 - \cos^2 t \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\right)} \, dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)} \, dt \end{aligned}$$

Na tej točki sva uporabili literaturo, saj je zgornji integral potrebno razviti v vrsto, kar pa presega najino znanje. Formula, ki je nastala, je zelo kompleksna, za naju je ključnega pomena le to, da v vrsti nastopa iracionalno število π . Ena od najinih hipotez je namreč bila, da za izračun obsega elipse potrebujemo to iracionalno število. Dolžina krivulje je enaka:

$$l(\mathcal{K}) = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots \right],$$

pri čemer je ε numerična ekscentričnost elipse, a pa večja polos elipse. Kot pa že vemo iz definicije ima vrsta neskončno mnogo členov. Ker sami še ne znava računati odvodov, sva zgoraj navedene podatke poiskali v literaturi in sicer v diplomskih nalogah (Darja, 2021) in (Milinković Dijana, 2016) ter v spletnem učbeniku (Hladnik, 2012).

8. RAZPRAVA

8.1. Ugotovitve

Skozi raziskovanje sva se dokopali do štirih relativno preprostih formul, s katerimi lahko izračunamo približke dolžine obsega elipse, ki so podobne formuli za obseg kroga. Prva formula, formula aritmetične sredine, se je izkazala za dokaj natančno, še posebej pri manjših razmerjih med polosema. Kljub temu, da njena napaka z večanjem razmerja raste, se ustali nekje okoli 20%, kar je še vedno več kot dovolj natančno za vsakdanjo uporabo, kjer se redko srečujemo z elipsami, katerih razmerja presegajo 5 : 1. Druga formula, do katere sva se dokopali, je formula geometrične sredine, katero je za izračun Zemljinega tira uporabil tudi Kepler. Izkazala se je za zdaleč najpovršnejšo. Že pri razmerju 4 : 1 naredi nekaj odstotkov večjo napako kot formula aritmetične sredine pri zelo velikih razmerjih, ustali pa se šele okoli razmerja 1 : 500. Brez težav lahko zaključiva, da je ta formula primerna le za elipse z izredno majhno ekscentričnostjo, pa še pri teh bomo dobili natančnejši rezultat, če uporabimo najino prvo formulo, ki je vrh vsega še preprostejša. Kljub temu, da je bil najin drugi poskus slabši od prvega, je zato tretja formula prekosila obe predhodni. Formula kvadratne sredine, se je izkazala za relativno zelo natančno, tudi pri zelo velikih razmerjih. Od umiritve napake pri 11%, ki jo doseže pri razmerju 50 : 1 do razmerja 1000 : 1, njena napaka zraste za manj kot 0,1%. To je vrednost, ki jo formula aritmetične sredine doseže okoli razmerja 6 : 1, formula geometrične sredine pa že malo po razmerju 2 : 1. Ker pa nisva bili povsem zadovoljni nad rezultati teh treh formul sredin, sva se odločili, z malo sreče, poiskati še natančnejšo. Le to sva tudi našli in jo poimenovali formula petin, saj sva parametra a in b različno obtežili. Rezultati, ki sva jih pridobili s to formulo, so res bili daleč najnatančnejši, še več, ta formula ima maksimum, ki ga doseže okoli razmerja 2,3 : 1 in znaša približno 3,89%, nato pa napaka, ki jo naredi začne upadati in do razmerja 1000 : 1 znaša le še 0,65%. Treba pa je poudariti, da parametra nista enakovredna in je formula primerna le za tiste elipse pri katerih je $a > b$, oziroma v nasprotnem primeru v formuli a in b zamenjamo. Za izračun obsega elipse z majhno ekscentričnostjo lahko torej uporabimo katerokoli od najinih formul in bomo dobili dokaj točen rezultat, vendar je že pri majhnih razmerjih najbolj ustrezno uporabiti zadnjo. Medtem je za elipse z veliko ekscentričnostjo primerna izključno zadnja.

Po pričakovanjih pa so tudi matematiki pred nama že razmišljali o tem, kako izračunati obseg krivulji, ki od središča ni ves čas enako oddaljena. Do odgovora so prišli, ko so odkrili integrale,

vendar je za izračun takega integrala potrebna tehnologija, rezultat pa ima neskončno mnogo decimalnih mest. Blizu rešitvi je prišel tudi matematik Srinivasa Ramanujan z zelo točno formulo, ki pa je prekompleksna za srednješolski učbenik, kaj šele za vsakdanjo uporabo. Najine formule so za takšno uporabo zagotovo dovolj preproste in natančne.

8.2. Vrednotenje hipotez

Skozi nalogo sva zbrali relativno veliko podatkov, namen katerih je bil ugotoviti ali lahko hipoteze, postavljene pred začetkom raziskovanja, potrdiva ali jih bova morali ovreči. Postavljenih je bilo 5 hipotez.

Prvo, ki se glasi »Formula za obseg elipse ne obstaja ali pa je prekompleksna za srednješolski učbenik,« lahko potrdiva, saj, kot sva skozi nalogo nemalokrat omenili, lahko obseg izračuna le računalnik z uporabo integrala, rezultat pa bo iracionalno število, torej točnega rezultata ne moremo dobiti. Formula za obseg elipse obstaja, vendar je res preveč kompleksna, da bi jo našli v srednješolskem učnem načrtu.

Drugo hipotezo »Matematiki so v preteklosti poskušali najti formulo za obseg elipse in so našli metode za zelo dobre približke obsega,« lahko potrdiva. V nalogi sva se osredotočili na formulo Ramanujana, ki gotovo ni edini, ki se je kdaj ukvarjal s tem vprašanjem, spada pa njegova formula med ene najuspešnejših.

Hipotezo »Krožnica je poseben primer elipse, zato ima pri obsegu elipse nekakšno vlogo tudi iracionalno število π ,« lahko znova potrdiva. Tako v najinih formulah, Ramanujanovi in v vrsto razvitem integralu lahko opazimo, da ima vlogo tudi iracionalno število π .

Predzadnjo oziroma četrto hipotezo »Če v formuli, ki predstavlja približek za obseg elipse, povečujemo razmerje med polosema, se povečuje tudi napaka,« potrjujeva le delno. Pri prvih treh formulah, torej tistih kjer r zamenjamo z različnimi sredinami vrednosti parametrov a in b , napaka res raste z večanjem razmerja. Pri formuli petin pa opazimo, da napaka doseže maksimum približno pri razmerju 2:1, nato pa se začne manjšati. Pri vseh formulah pa je opazno, da se napaka pri nekem razmerju »umiri«.

Peto, zadnjo hipotezo »Keplerjev izračun dolžine Zemljinega tira je precej nenatančen, kajti takratno znanje o elipsi in predvsem takratna tehnologija točnega izračuna nista omogočala« sva ovrgli, saj Zemljin tir zaradi izjemno majhne ekscentričnosti spominja na krožnico in posledično Kepler pri računanju obsega z uporabo formule geometrične sredine ni naredil večje napake. Konkretno, razmerje med polosema je manjše kot 1,1:1, kar bi iz najinih izračunov pomenilo, da je napaka manjša od 0,17%.

Kot je zgoraj razvidno sva od petih hipotez tri potrdili, eno delno potrdili in eno ovrgli. Glede na to, da je bilo najino predhodno znanje o stožnicah zelo skromno, saj je snov v gimnazijskem programu namenjena delu v tretjem letniku, meniva, da sva si hipoteze dokaj uspešno zastavili. Sedaj, ko sva si skozi nalogo pridobili potrebno znanje o elipsi, bi seveda lahko zgornje hipoteze zastavili jasneje oziroma še kakšno dodali.

8.3. Nadaljnje raziskovanje tematike

Tema, ki sva jo obravnavali v nalogi je nedvomno odprta za nadaljnje raziskovanje. Po vzorcu treh formul, v katerih sva vrednost polmera pri krožnici v formuli za obseg kroga, zamenjali z različnimi sredinami vrednosti polos a in b pri elipsi, bi z nadaljnjim raziskovanjem najverjetneje našli še druge, tem podobne formule. Torej, nalogo bi lahko razširili z iskanjem drugih srednjih vrednosti med veliko in malo polosjo, čeprav predvidevava, da je najverjetneje kvadratna v tem primeru najbolj natančna in bi težko našli kaj primernejšega. Prav tako bi lahko poskusili najine formule dopolniti še s kakšnimi dodatnimi členi, ki bi zmanjševali napako oziroma njeno rast. Poiskali bi lahko druge programe s katerimi bi računali tudi natančnost Ramanujanove formule in narisali graf njene napake. Ko osvojiva več znanja o integralih, pa se lahko bolj poglobiva tudi v ta del naloge.

9. ZAKLJUČEK

Namen najine raziskovalne naloge je bil ugotoviti, zakaj formule za obseg elipse ni v matematičnem učbeniku in kako to pomanjkljivost odpraviti. Zagotovo lahko rečeva, da sva skozi nalogo uspeli najti odgovor na zgornje vprašanje, prav tako pa se lahko pohvaliva s tem, da sva našli relativno dobro rešitev na zastavljen problem. Ugotovili sva, da sta najustreznejša približka obsega elipse, formula, v kateri polmer v formuli za obseg kroga zamenjava s kvadratno sredino male in velike polosi in t.i. »formula petin«. Ti formuli ne presegata zahtevnosti, ki je pričakovana za tretji letnik gimnazijskega programa. Sta enostavni za uporabo in pri majhnih ekscentričnosti obe precej natančni, »formula petin« pa je prav tako izredno natančna pri velikih razmerjih med polosema.

Predvsem sva ponosni na to, da nama je nalogo uspelo izpeljati na nivoju, ki ga razumeva in je primeren za najino dosedanje znanje, čeprav se je bilo nemogoče povsem izogniti nekaterim nama še do sedaj nepoznanim vsebinam.

10. DRUŽBENA ODGOVORNOST

Kljub temu, da matematika na prvi pogled v vsakdanjem življenju ne nosi tolikšne družbene odgovornosti kot nekatera druga področja, to še zdaleč ne drži. Z elipsastimi objekti se srečujemo, ne da bi se tega sploh zavedali, vsak dan in z najinimi formulami lahko vsak hitro, brez uporabe računalnika izračuna dolžine teh objektov. Mizarji bodo z uporabo najinih formul lahko hitro in preprosto izračunali obsege elipsastih kosov lesa oz. pohištva, urejevalci vrtov dolžino ograje, gred elipsastih oblik, šivilje jih bodo lahko uporabile za izdelavo kril ali oblek... Če vzamem za lažjo predstavo konkreten primer mize elipsaste oblike katere velika polos meri 2m mala pa 1,5m ($1, \bar{3} : 1$), je vrednost obsega izračunanega s formulo petin 10,79m, vrednost obsega izračunanega s programom Geogebra pa 11,05m. Najina formula pri tem razmerju odstopa za približno 2,35%, kar je v tem konkretnem primeru 0,26m. Še pomembnejša pa je v svetu matematikov, fizikov in astronomov. V nalogi sva namreč ugotovili, da formula, ki jo je za izračun dolžine Zemljinega tira okoli sonca, uporabil Kepler naredi kljub majhni ekscentričnosti večjo napako kot najine druge formule, ki bi bile iz tega razloga uporabnejše in posledično dale boljše rezultata

11. VIRI IN LITERATURA

- Cook, J. (10. 1 2021). *Ramanujan Approximation for Circumference of an Ellipse*.
Pridobljeno iz Big Data Zone: <https://dzone.com/articles/ramanujan-approximation>
- Darja, M. (2. 2 2021). *Hookove elipse*. Pridobljeno iz Diplomsko delo:
http://pefprints.pef.uni-lj.si/1513/1/Darja_Mihelčič_Diplomsko_delo.pdf
- Hladnik, M. (2012). *ANALIZA 2, Zapiski predavanj*. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko.
- Mandl, P, M. R. (2015). *Arhitas iz Tarenta*. Pridobljeno iz Diplomsko delo:
http://pefprints.pef.uni-lj.si/3088/1/Diploma_Mandl_Polona.pdf
- Milinković, D, M. R. (11. 5 2016). *Elipsa skozi zgodovino*. Pridobljeno iz Diplomsko delo:
<http://pefprints.pef.uni-lj.si/3447/1/Diploma.pdf>
- Milutinović, U. (2012). Kaj so sredine in kako jih uporabljamo? *Presek*, 332–342.
- neznan. (25. 11 2020). *Izpeljava enačbe elipse iz enačbe krožnice*. Pridobljeno iz Vega 3:
<https://eucbeniki.sio.si/vega3/360/index7.html#>
- Pavlič, G., Rugelj, M., Šparovec, J., Kavka, D., (2013). *Spatiumnovum*. Ljubljana: Modrijan založba.
- Roberts, M. (10. 1 2021). *A Formula for the Perimeter of an Ellipse*. Pridobljeno iz Extreme learning: <http://extremelearning.com.au/a-formula-for-the-perimeter-of-an-ellipse/>
- Westman, R. S. (11. 21 2020). *Johannes Kepler*. Pridobljeno iz Encyclopedia Britannica:
<https://www.britannica.com/biography/Johannes-Kepler>