

GIMNAZIJA VIČ
TRŽAŠKA CESTA 72
1000 LJUBLJANA

Področje:
MATEMATIKA

PROBLEM n KRALJIC

Raziskovalna naloga

Avtor:
Jaka Slapar, 3. letnik

Mentorica:
Nataša Šuligoj

Ljubljana, 2021

KAZALO

1.	<i>Povzetek</i>	4
2.	<i>Uvod</i>	5
2.1	Hipoteze	6
3.	<i>Postavitev problema</i>	7
4.	<i>Teoretični del</i>	9
4.1	Osnovni pojmi Teorije grafov	9
4.2	Kraljičini grafi	11
4.3	Neodvisnostne množice in klike	15
4.4	Modularna aritmetika	19
4.5	Simetrije šahovnice	21
5.	<i>Praktični del</i>	24
5.1	Obstoj rešitev za problem n kraljic	26
5.2	Število rešitev problema n kraljic	33
5.3	Splošne šahovnice in posplošeni kraljičini grafi	41
6.	<i>Zaključek</i>	44
7.	<i>Literatura</i>	45
8.	<i>Viri slik</i>	47

KAZALO SLIK

Slika 1: Vse postavitve 2 trdnjav na 2×2 šahovnico.....	5
Slika 2: Torusova šahovnica	7
Slika 3: Podaljšane diagonale	7
Slika 4: Postavitev 4 kraljic na 4×4 šahovnico.....	8
Slika 5: Graf reda 4	9
Slika 6: Kraljičin graf standardne 2×2 šahovnice	11
Slika 7: Kraljičini grafi drugih standardnih šahovnic oblike $2 \times n$	11
Slika 8: Complementa grafa modularne in standardne 4×4 šahovnice	12
Slika 9: Delitev šahovnice glede na število povezav	13
Slika 10: Maksimalne neodvisnostne množice	15
Slika 11: Dominantne množice	16
Slika 12: Simetrije šahovnice	21
Slika 13: Osnovne rešitve za problem neodvisnosti na 8×8 šahovnici.....	25
Slika 14: Način označevanja polj.....	26
Slika 15: Komplement kraljičinega 3-grafa	26
Slika 16: Ciklični komplement kraljičinega 3-grafa	27
Slika 17: Rešitev za standardno 9×9 šahovnico	30
Slika 18: Tabela vseh znanih rešitev problema n kraljic na standardnih šahovnicah.....	33
Slika 19: Časovna zahtevnost algoritma za različne n	34
Slika 20: Rešitev za standardno 4×4 šahovnico	36
Slika 21: Rešitev za modularno 5×5 šahovnico	36
Slika 22: Kombinirana rešitev	37
Slika 23: Komplement kraljičinega grafa standardne 3×3 šahovnice	41
Slika 24: Nenavadna šahovnica 1	42
Slika 25: Graf za nenavadno šahovnico 1	42
Slika 26: Nenavadna šahovnica 2	42
Slika 27: Nenavadna šahovnica 3	43
Slika 28: Graf za nenavadno šahovnico 3	43
Slika 29: Edina rešitev za nenavadno šahovnico 3.....	43

1. POVZETEK

V raziskovalni nalogi sem preučeval problem neodvisnosti kraljic ali problem n kraljic. Problem nas vpraša, na koliko različnih načinov lahko na dano šahovnico postavimo maksimalno število kraljic, tako da se med seboj ne napadajo. Izkaže se, da je problem pri večjih šahovnicah matematično dokaj kompleksen, saj zaenkrat poznamo zgolj grobe ocene za število rešitev. Najboljši način reševanja tako zaenkrat ostaja groba računalniška moč.

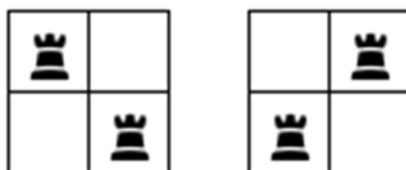
Problem obravnavam na standardnih in na modularnih šahovnicah, pogledam pa si tudi nekaj primerov šahovnic nenavadnih oblik. Na koncu sem napisal še računalniški program, ki nam za šahovnice oblike $n \times n$ izpiše število rešitev.

Ključne besede: Problem n kraljic, neodvisnostne množice, klike, modularna aritmetika, kraljičini grafi, simetrije šahovnice

2. UVOD

V raziskovalni nalogi sem se trudil povezati področje matematike s priljubljeno igro šah. Že kot otrok sem rad igral različne igre, ki so vsebovale logično razmišljanje. Morda je šah popoln tak primer.

V 9. razredu osnovne šole sem si zadal podoben izziv za raziskovalno nalogo. Obravnaval sem problem neodvisnosti za trdnjave. Vprašal sem se, koliko trdnjav lahko postavimo na standardni $n \times n$ šahovnico, brez da bi se te med seboj napadale. Problem sem razširil tudi na bolj splošne šahovnice in pokazal, da z rešitvijo problema neodvisnosti trdnjav na splošnih šahovnicah obravnavamo tudi problem postavitve tekačev. Naslov naloge je bil: »Trdnjavski polinomi«, saj sem število različnih postavitvev n trdnjav na šahovnico zapisal s pomočjo koeficientov rodovne funkcije, ki je bila v teh primerih polinom. Za celoten problem sem napisal tudi rekurziven računalniški program, ki je pri dani šahovnici kot rešitev vrnil ustrezen trdnjavski polinom.



Slika 1: Vse postavitve 2 trdnjav na 2×2 šahovnico

Letos pa sem se lotil podobne, a vseeno kar precej drugačne tematike, in to so postavitve kraljic. Zanimalo nas bo, kako lahko na standardno $n \times n$ šahovnico postavimo n kraljic, ne da bi se med seboj napadale. Na prvi pogled se zdi, da lahko iz znanja o postavitvah trdnjav in lovcev zelo hitro prevedemo enačbe tudi za kraljice, a problem je v resnici veliko težji. Prav zato me je tako pritegnil. Problem sem poimenoval »problem n kraljic ali problem neodvisnosti za kraljice«. Obravnaval bom tudi soroden problem, to je problem dominance. V tem primeru se sprašujemo, kako lahko na šahovnico postavimo kraljice tako, da bodo skupaj napadale vsa polja šahovnice.

Poleg klasičnih šahovnic bom obravnaval tudi modularne šahovnice, to so šahovnice na torusih.

Problem n kraljic je posplošitev problema neodvisnosti za 8 kraljic na standardni šahovski plošči, ki ga je leta 1848 zastavil nemški šahist Max Bezzel v reviji »Neue Berliner Schachzeitung« [1] [2]. Kmalu je problem začel raziskovati matematik C. F. Gauss, ki je trdil, da je število rešitev 72. Prvi, ki pa je odkril vseh 92 rešitev, je

bil Johan A. Nauck [2], Pauls [3] pa je njegovo ugotovitev dokazal. É. Lucas in T. B. Sprague [4] sta v reviji "Quatrième récréation" odlično opisala delo mnogih matematikov okoli osnovnega problema neodvisnosti 8-ih kraljic. Sprague je celo zapisal števila postavitvev za šahovnice od $n = 4$ do $n = 11$ in za vsako zapisal tudi število osnovnih rešitev. Prvi dokaz, da na $n \times n$ šahovnico lahko postavimo n kraljic, pa je napisal Pauls leta 1874. Mnogi raziskovalci pa ta dosežek pripisujejo Ahrensu, čeprav je tudi sam priznal, da je idejo za dokaz dobil iz Paulsovega.

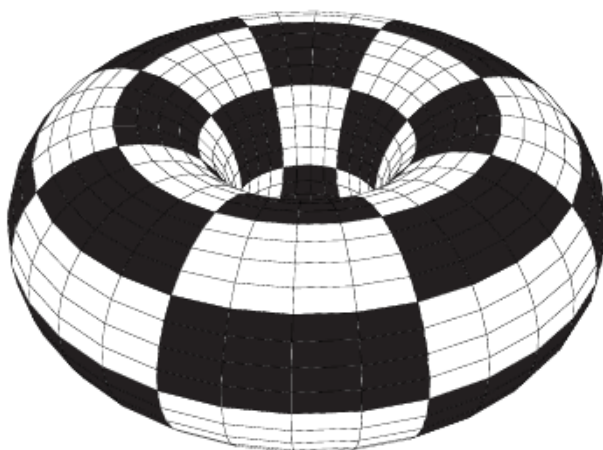
2.1 HIPOTEZE

1. Za kvadratne šahovnice, kjer je $n > 3$, vedno obstaja rešitev problema neodvisnosti za kraljice.
2. Za kvadratne šahovnice lahko izdelamo algoritem, ki bo izračunal število različnih postavitvev kraljic.
3. Za število rešitev za standardne šahovnice lahko s pomočjo matematičnih postopkov najdemo dobro spodnjo mejo.

3. POSTAVITEV PROBLEMA

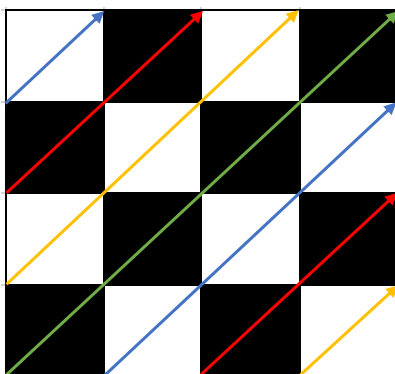
Pri problemu n kraljic nas zanima, na koliko načinov lahko postavimo n kraljic na $n \times n$ šahovnico, ne da se med seboj ogrožajo. Problem bomo obravnavali na standardnih in modularnih (torusovih) šahovnicah.

Standardna šahovnica je šahovnica pravokotne oblike z $n \times m$ polji, *modularne šahovnice* pa so šahovnice, ki smo jim združili nasprotni si stranici in jih tako spremenili v torus.



Slika 2: Torusova šahovnica

Modularne šahovnice si lahko predstavljamo kot standardne šahovnice, pri katerih pa so diagonale modularno podaljšane (primer podaljšanih diagonal najdemo na sliki 3, kjer je vsaka označena s svojo barvo).

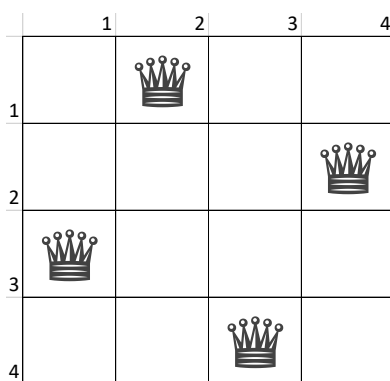


Slika 3: Podaljšane diagonale

V nadaljevanju bomo v večini obravnavali zgolj $n \times n$ šahovnice. Vrstice šahovnice bomo označevali od zgoraj navzdol, s številkami od 1 do n , in stolpce od 1 na levi do n na desni strani. Včasih pa bomo (predvsem pri modularnih šahovnicah) raje uporabili številke od 0 do $n - 1$, saj se v nekaterih primerih to

izkaže za preprosteje. Polja šahovnice bomo označil s pari dveh števil (i, j) , kjer je i številka vrstice in j številka stolpca. Diagonale bomo označili z oznakama $l +$ oziroma $l -$, pri čemer je $l +$ diagonala (naraščajoča diagonala), ki vsebuje vsa polja (i, j) , za katera velja $i + j = l$, $l -$ pa diagonala (padajoča diagonala), ki vsebuje polja (i, j) , za katera velja $i - j = l$. Glede na to, da kraljice (za razliko od trdnjav) napadajo tudi diagonalno, bo uporaba teh oznak nujna.

Če želimo n kraljic postaviti na $n \times n$ šahovnico, mora v vsaki vrstici (in stolpcu) biti natanko ena kraljica. Vsako rešitev je torej oblike $\{(\varphi(1), 1), (\varphi(2), 2), \dots, (\varphi(n), n)\}$, pri čemer je φ presliava iz množice stolpcev v množico vrstic. Ker mora v vsaki vrstici biti ena sama kraljica, je φ seveda permutacija. Krajše lahko vsako rešitev zapišemo kot permutacijo $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$, pri čemer pa vsaka permutacija seveda ne pomeni tudi rešitve. Tako lahko rešitev na sliki 4. zapišemo kot $(3, 1, 4, 2)$ ali pa kar (3142) namesto $\{(3,1), (1,2), (4,3), (2,4)\}$.



Slika 4: Postavitev 4 kraljic na 4×4 šahovnico

Permutacija φ predstavlja rešitev za $n \times n$ šahovnico samo, če se kraljice ne bodo napadale po diagonalah. To pomeni, da morata biti obe funkciji $\varphi(k) + k$ in $\varphi(k) - k$ injektivni, kar pomeni, da se vsaka vrednost $\varphi(k) + k = l$ oziroma $\varphi(k) - k = l$ pri permutaciji pojavi le enkrat. Ta pogoj nam precej zmanjša število možnih permutacij, ki predstavljajo rešitve. V primeru 4×4 šahovnice imamo le dve rešitvi problema neodvisnosti (poleg zgornje rešitve še rešitev (2413)), medtem ko je število permutacij štirih elementov enako 24.

Za modularne šahovnice pogoj nenapadanja po diagonalah pomeni, da sta preslikavi $\varphi(k) + k \pmod{n}$ in $\varphi(k) - k \pmod{n}$ tudi permutaciji. Takoj lahko preverimo, da zgornja rešitev za klasično 4×4 šahovnico ni rešitev pri modularni 4×4 šahovnici, ker kraljica na polju $(2,1)$ napada kraljico na polju $(3,4)$, saj je $2 + 1 = 3 + 4 \pmod{4}$.

Glavni viri za to poglavje so [5] [6].

4. TEORETIČNI DEL

4.1 OSNOVNI POJMI TEORIJE GRAFOV

Predstavljajmo si, da vzamemo vse ljudi v naključnem mestu in med dvema potegnemo črto, če sta prijatelja. Običajno predpostavimo, da je prijateljstvo simetrična relacija, kar pomeni, da če nekdo razume nekoga za prijatelja, tudi ta prvega razume za prijatelja. V tem primeru dva prijatelja lahko povežemo z dvojno puščico ($\leftrightarrow$) in prijateljstva med ljudmi ponazorimo z grafom. Če pa razumemo, da je prijateljstvo lahko tudi le enostransko, pa povezave delamo z enojnimi puščicami ($\rightarrow$) in tako dobimo *usmerjeni graf* ali *digraf*.

Grafi ali digrafi so tako modeli odnosov med končnim številom objektov. Teorija grafov ima korenine v ugankah in igrah, danes pa predstavlja pomembno osnovo za raziskovanje problemov na področjih računalništva, kemije, psihologije, ekologije, genetike itd. [7]

Definicija: Enostaven neusmerjen *graf* G je urejen par množic $G = (V(G), E(G))$, $V(G)$ je neprazna končna množica *vozlišč grafa* G , $E(G) \subseteq \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ pa množica *povezav grafa* G . Številu oglišč rečemo *red grafa* G .

Če je $e = \{u, v\}$ povezava v grafu, bomo rekli, da sta vozlišči u in v *krajišči* te povezave in da sta si zato u in v *sosednja*, kar lahko označimo kot $u \sim v$. V primeru, kjer je jasno, na kateri graf se nanašata množici vozlišč in povezav, bomo namesto $V(G)$ in $E(G)$ pisali kar V in E .

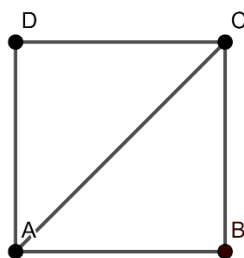
Primer: Naj graf G reda 4 definira

$$V = \{a, b, c, d\}$$

in

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{a, c\}\}$$

potem slika tega grafa izgleda tako:



Slika 5: Graf reda 4

Število povezav, ki jih ima v grafu G neko vozlišče v , zapišemo kot $\deg(v)$. To število označuje *stopnjo vozlišča v* . Če obstaja tako število k , da za vsako vozlišče v grafu G velja, da je $\deg(v) = k$, je graf *k -regularen* in k imenujemo *stopnja grafa G* .

Graf G je *poln graf na n točkah*, če velja $|V(G)| = n$ in če so vsi pari oglišč med seboj sosednji. Tak graf ima tako $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav in je seveda $(n-1)$ -regularen. Poln graf z n vozlišči bomo označili s K_n . Nasprotno je *prazen graf na n točkah* graf, za katerega velja $|V(G)| = n$ in $E(G) = \{\}$. *Ciklični graf na n točkah* je graf, za katerega velja $|V(G)| = n$ in so vozlišča med seboj povezana tako, da sestavljajo en sam cikel. Tak graf označimo s C_n .

Definicija: Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja:

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ in } E(H) \subseteq E(G).$$

Definicija: Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf, potem je njegov *komplementarni graf* $G^c = (V(G^c), E(G^c))$, kjer je $V(G^c) = V(G)$, množica povezav $E(G^c)$ pa vsebuje natanko vse tiste povezave $\{v, u\}$, $v \neq u$, za katere velja $\{u, v\} \notin E(G)$.

Glavni viri za to poglavje so [8] [9] [10].

4.2 KRALJIČINI GRAFI

Povežimo pojme teorije grafov s problemom postavitve kraljic na šahovnico. Podobno seveda lahko obravnavamo tudi postavitve ostalih šahovnic.

Definicija: Standardni kraljičin n - graf Q_n je graf z $n \times n$ vozlišči

$$V(Q_n) = \{v_{ij} = (i, j); 1 \leq i, j \leq n\}$$

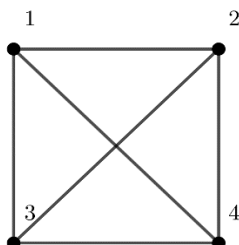
in množico povezav

$$E(Q_n) = \{\{v_{ij}, v_{kl}\}; v_{ij} \neq v_{kl}, i = k \vee j = l \vee i + j = k + l \vee i - k = k - l\}.$$

Kraljičin graf je torej graf, kjer vsako izmed polj standardne šahovnice razumemo kot vozlišče grafa, dve vozlišči pa sta povezani natanko tedaj, ko se pripadajoči polji ogrožata.

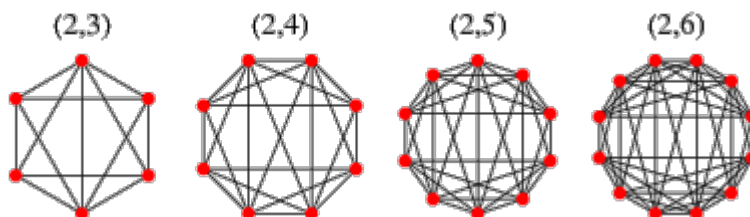
Poglejmo si nekaj primerov kraljičinih grafov Q_n pri nizkih vrednostih parametra n .

Primer: Graf G je graf standardne 2×2 šahovnice



Slika 6: Kraljičin graf standardne 2×2 šahovnice

Tak graf je dokaj preprost in razumljiv. Bolj zanimivi pa so drugi grafi šahovnic z obliko $2 \times n$ (definicija kraljičinih grafov v tem primeru je povsem analogna definiciji za $n \times n$ šahovnice). Pa si pogledjmo še nekaj takih primerov.



Slika 7: Kraljičini grafi drugih standardnih šahovnic oblike $2 \times n$

Pri manjših šahovnicah se izkaže za lažje, da zanje pravzaprav narišemo kar komplementarni graf (G^C). V takem grafu robovi povezujejo pare polj, ki se med seboj ne ogrožajo, če na eno od njiju postavimo kraljico.

Definicija: Modularni kraljičin n - graf T_n je graf z $n \times n$ vozlišči

$$V(T_n) = \{v_{ij} = (i, j); 0 \leq i, j \leq n - 1\}$$

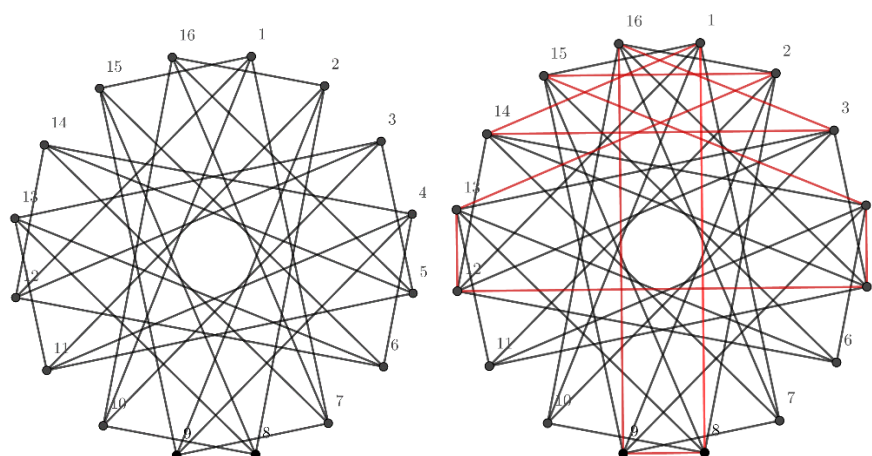
in množico povezav

$$E(T_n) = \{\{v_{ij}, v_{kl}\}; v_{ij} \neq v_{kl}, i = k \vee j = l \vee i + j = k + l \pmod{n} \vee i - k = k - l \pmod{n}\}.$$

Modularni kraljičin graf je torej graf, kjer vsako izmed polj modularne šahovnice razumemo kot vozlišče grafa, dve vozlišči pa sta povezani natanko tedaj, ko se pripadajoči polji ogrožata.

Poglejmo si nekaj primerov modularnih kraljičinih grafov T_n pri nizkih vrednostih parametra n .

Primer: Primerjajmo komplementa grafa modularne 4×4 šahovnice in standardne 4×4 šahovnice.



Slika 8: Komplementa grafa modularne in standardne 4×4 šahovnice

Rdeče povezave na drugem grafu standardne šahovnice predstavljajo razlike med grafoma. Opazimo lahko, da se grafa razlikujeta le v tem, da ima drugi nekaj dodatnih povezav. Iz tega izhaja, da je Q_n podgraf T_n .

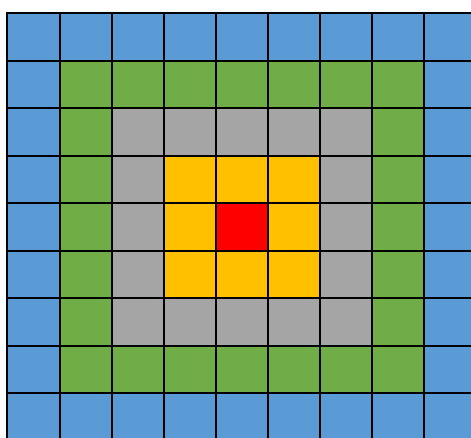
Preštejmo sedaj povezave v kraljičinem grafu. Pri štetju povezav smo uporabili idejo iz [11].

Trditev: Kraljičin graf Q_n ima

$$\frac{n(n-1)(5n-1)}{6}$$

povezav.

Dokaz: Razdelimo šahovnico, kot je nakazano na spodnji sliki.



Slika 9: Delitev šahovnice glede na število povezav

Vsako od polj iz šahovnice zagotovo napada vsa horizontalna in vertikalna polja ter polja vzdolž (dveh) diagonal. Vsako polje napada natanko $n - 1$ horizontalnih in $n - 1$ vertikalnih polj, število napadanih diagonalnih polj pa je odvisno od tega, v katerem pasu oddaljenost od roba se polje nahaja. Polja na najbolj zunanjem pasu (modra barva) napadajo $(n - 1)$ diagonalnih polj, polja v naslednjem pasu (zelenem) $(n - 1) + 2$ diagonalnih polj, nato (siva polja) $(n - 1) + 4$ diagonalnih polj, ... Število vseh povezav v grafu je torej

$$\frac{1}{2}(3(n-1) + 2((n-2)^2 - (n-4)^2 + \dots + 1^2)),$$

če je n lih, in

$$\frac{1}{2}(3(n-1) + 2((n-2)^2 - (n-4)^2 + \dots + 2^2)),$$

če je n sod. Če upoštevamo formule za vsote kvadratov

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2m)^2 = \frac{2m(m+1)(2m+1)}{3}$$

in

$$1^2 + 3^2 + \dots (2m - 1)^2 = \frac{m(2m + 1)(2m - 1)}{3},$$

ki ju lahko izpeljemo iz splošne formule za vsoto kvadratov,

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6},$$

dobimo v obeh primerih vsoto $\frac{n(n-1)(5n-1)}{3}$. Q.E.D.

V dokazu zgornjega izreka smo videli, da ima graf Q_n $4(n - 1)$ vozlišč s stopnjo $3(n - 1)$, $4(n - 3)$ vozlišč s stopnjo $3(n - 1) + 2$, $4(n - 5)$ vozlišč s stopnjo $3(n - 1) + 4$, ... V primeru kraljičinega grafa za modularne šahovnice imamo bolj preprost rezultat:

Trditev: Graf T_n je $4(n - 1)$ regularen graf na n^2 točkah. Število povezav v grafu T_n je $2n^2(n - 1)$.

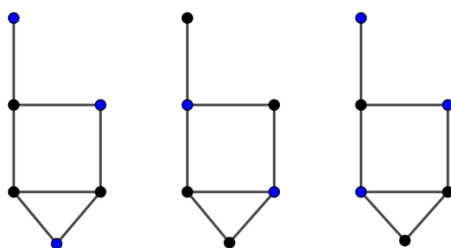
Dokaz: Ker ima vsaka podaljšana diagonala natanko n polj, vsako polje v modularni $n \times n$ šahovnici napada $4(n - 1)$ ostalih polj. Q.E.D.

4.3 NEODVISNOSTNE MNOŽICE IN KLIKE

V tem razdelku bomo definirali tiste pojme teorije grafov, ki so najbolj neposredno povezani s problemom postavitve šahovskih figur na šahovnico. Definicije v tem razdelku smo povzeli po [7].

Definicija: Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica $S \subset V$ je *neodvisnostna množica* grafa G , če za vsaka $u, v \in S$ velja $\{u, v\} \notin E$. Neodvisnostna množica S je *maksimalna neodvisnostna množica* grafa G , če S ni prava podmnožica nobene druge neodvisnostne množice grafa G . *Neodvisnostno število* grafa G je kardinalnost največje neodvisnostne množice grafa G , in ga označimo z $\alpha(G)$.

Na sliki 10 so prikazane maksimalne neodvisnostne množice danega grafa (vozlišča iz neodvisnostne množice so označena z modro barvo). Opazimo, da maksimalne neodvisnostne množice nimajo nujno vse iste kardinalnosti. Ker lahko hitro vidimo, da neodvisnostna množica v tem primeru ne more imeti štirih elementov, je $\alpha(G) = 3$.

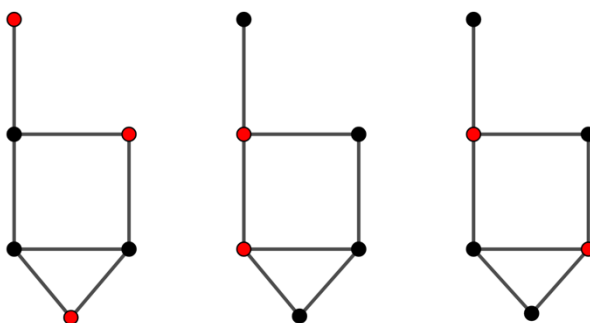


Slika 10: Maksimalne neodvisnostne množice

Definicija: Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica $D \subset V$ je *dominantna množica* grafa G , če za vsak $u \in V \setminus D$ obstaja tako vozlišče $v \in D$, da je $\{u, v\} \in E$. Dominantna množica D je *minimalna dominantna množica* grafa G , če nobena prava podmnožica množice D ni dominantna množica grafa G . *Dominantno število* grafa G je kardinalnost najmanjše dominantne množice grafa G , in ga označimo z $\gamma(G)$.

Slika 11 kaže nekaj primerov dominantnih množic v danem grafu (oglišča dominantnih množice D so označene z rdečo barvo). Vse tri dominantne množice so minimalne; opazimo pa, da nimajo enakega števila elementov. Ker

se lahko hitro prepričamo, da v grafu ne obstaja dominantna množica z enim samim elementom, je $\gamma(G)$ enak 2.



Slika 11: Dominantne množice

Neposredno iz definicij sledi, da je neodvisnostna množica maksimalna natanko tedaj, ko je hkrati dominantna. V nasprotnem primeru bi lahko v neodvisnostno množico vedno dodali še kakšno vozlišče. Seveda pa ne velja, da mora biti minimalna dominantna množica tudi neodvisnostna, kot lahko vidimo v drugem primeru na zgornji siki.

Čeprav v nadaljevanju naslednje definicije ne bomo potrebovali, jo vseeno zapišimo, ker ima zanimivo povezavo z nekaterimi drugimi problemi šahovnic.

Definicija: Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica $D \subset V$ je *neodvisnostna dominantna množica* grafa G , če je hkrati dominantna in neodvisnostna. Dominantna neodvisnostna množica D je *minimalna dominantna neodvisnostna množica* grafa G , če nobena prava podmnožica množice D ni dominantna množica grafa G . Kardinalnost najmanjše dominantne neodvisnostne množice grafa G označimo z $i(G)$.

Na sliki 11 prva in tretja slika predstavljata dominantni neodvisnostni množici, srednja pa ni neodvisnostna; $i(G) = 2$.

Naslednja trditev sledi direktno iz definicij.

Trditev: Naj bo $G = (V, E)$ graf. Potem velja $\gamma(D) \leq i(G) \leq \alpha(G)$.

Da v zgornji neenakosti lahko nastopijo tudi enačaji, lahko preprosto vidimo na primeru polnega grafa K_n , kjer očitno velja $\gamma(K_n) = i(K_n) = \alpha(K_n) = 1$.

Če na $n \times n$ šahovnico, standardno ali modularno, postavimo k kraljic, da se med seboj ne napadajo, je množica vozlišč v kraljičinem grafu Q_n oziroma T_n , ki pripadajo tem poljem, neodvisnostna množica. Prav tako velja obrat: če imamo v

grafu Q_n oziroma T_n neodvisnostno množico, se kraljice, postavljene na šahovnico na pripadajoča polja, ne napadajo. Ker očitno na šahovnico ne moremo postaviti več kot n med seboj ne napadajočih se kraljic, dobimo rezultat.

Trditev: Neodvisnostno število grafa Q_n (oziroma T_n) je enako n natanko tedaj, ko ima problem n kraljic za standardno (oziroma modularno) $n \times n$ šahovnico vsaj eno rešitev. Število različnih rešitev problema n -kraljic je enako številu različnih (maksimalnih) neodvisnostnih množic velikosti n .

Opomba: Iskanje dominantnih množic v kraljičinem grafu je ekvivalentno problemu iskanja postavitve kraljic na šahovnico, tako da bodo napadale vsa polja šahovnice. Problem iskanja neodvisnostne dominantne množice v kraljičinem grafu pa je ekvivalentno iskanju postavitve kraljic, ki se med seboj ne napadajo, skupaj pa napadajo vsa polja šahovnice.

Če imamo na šahovnici postavljenih k kraljic, ki se med seboj ne napadajo, bodo v komplementu kraljičinega grafa vozlišča, ki pripadajo poljem, na katerih stojijo kraljice, med seboj vsa paroma povezana. Taka postavitve kraljic nam torej da poln graf K_n kot podgraf v komplementu kraljičinega grafa. Seveda velja tudi obrat. Če v komplementu kraljičinega grafa najdemo poln podgraf K_n , dobimo postavitve k kraljic na šahovnici, ki se med seboj ne napadajo. Iskanje polnih podgrafov v danem grafu je pomemben problem v teoriji grafov. Poglejmo si definicijo.

Definicija: Naj bo G graf. Množica $Q \subset V(G)$ je *klika*, če so si paroma vsa polja iz množice Q v grafu G sosedna. Število elementov v največji kliku grafa je klično število grafa, $\omega(G)$.

Iskanje klik v grafu je torej ekvivalentno iskanju polnih podgrafov in je na primer povezano z znanim problemom barvanja grafa: če želimo vozlišča grafa pobarvati tako, da nobeni dve sosednji vozlišči nista pobarvani z isto barvo, zagotovo potrebujemo vsaj $\omega(G)$ barv. V primeru problema n kraljic pa imamo seveda naslednjo očitno povezavo:

Trditev: Rešitve problema n kraljic so v 1 – 1 korespondenci s klikami velikosti n v komplementu kraljičinega grafa.

Brez dokaza navedimo izrek, ki nam deloma odgovori na problem obstoja klik v danem grafu. Kratek dokaz izreka lahko najdemo v [12].

Izrek (Turanov izrek): Naj bo $k \geq 2$. Če za graf G velja

$$|E(G)| > \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{V(G)^2}{2},$$

je $\omega(G) \geq k$.

Poglejmo si, kaj nam Turanov izrek pove v primeru standardne 8×8 šahovice. Graf Q_8 ima po formuli, ki smo jo izpeljali v prejšnjem razdelku, 728 povezav. Ker je to graf na 64 točkah, ima komplement grafa Q_8 $\frac{64 \cdot 63}{2} - 728 = 1288$ povezav. Turanov izrek nam pove, da lahko v komplementu kraljičinega grafa Q_8 zagotovo najdemo k -kliko, če je $k \leq 3$. Kot vidimo, je apriorna ocena, ki jo dobimo iz Turanovega izreka, precej neuporabna pri reševanju problema 8 kraljic. Podobno slabo oceno dobimo v splošnem, saj lahko preverimo, da nam Turanov izrek za dovolj velike n pove, da v komplementu kraljičinega grafa Q_n obstaja klika velikosti reda zgolj $\frac{3n}{10}$.

4.4 MODULARNA ARITMETIKA

Modularna aritmetika je veja matematike, ki preučuje aritmetične sisteme celih števil, pri katerih se, ko je dosežena določena vrednost, vsa števila ponovno ponovijo v istem zaporedju. Primer takšnega sistema so 12-urne ure. Če je sedaj ura 7, bo čez 8 ur 3. Če bi tu uporabili preprosto seštevaje, bi dobili $7 + 8 = 15$, ker pa se števila združijo v nekakšen krog oziroma se ponovijo, ko kazalec odbije 12, je 12-urna ura primer modularnega aritmetičnega sistema.

Poglejmo si definicijo.

Definicija: Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$ in $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Potem rečemo, da je a kongruenten b po modulu m , če velja $m \mid (a - b)$ in pišemo $a \equiv b \pmod{m}$.

Števili sta kongruentni po modulu m natanko tedaj, ko imata isti ostanek pri deljenju z m . Relacija kongruence je *ekvivalenčna relacija*, saj zanjo veljajo naslednje lastnosti:

- $a \equiv a \pmod{m}$, *refleksivnost*
- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$, *simetričnost*
- $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$, *tranzitivnost*

Za operacijo seštevaje veljajo naslednja pravila:

- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + k \equiv b + k \pmod{m}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$,
- $a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \wedge a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$,
- $a + (m - a) \equiv 0 \pmod{m}$.

Podobno za operacijo množenje velja:

- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$
- $a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \wedge a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \Rightarrow a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$

Ker je kongruenca ekvivalenčna relacija na $\mathbb{Z}$, lahko množico celih števil zapišemo kot disjunktno unijo ekvivalenčnih razredov. V našem primeru je

$$\mathbb{Z} = 0_m \cup 1_m \cup \dots \cup (m-1)_m,$$

kjer je za vsak $i \in \mathbb{Z}$

$$i_m = \{km + i; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Iz zgornjih lastnosti za seštevaje in množenje sledi, da lahko v množico

$$\mathbb{Z}_m = \{0_m, 1_m, \dots, (m-1)_m\}$$

vpeljemo seštevanje kot

$$i_m + j_m = (i + j)_m$$

in množenje kot

$$i_m \cdot j_m = (i \cdot j)_m.$$

Množica $\mathbb{Z}_m$ je skupaj s tako definiranimi operacijama seštevanja in množenja *komutativen kolobar z enoto* (ki je tudi *modul* nad $\mathbb{Z}$). Nevtralni element za seštevanje je 0_m , enota za množenje pa 1_m . Če je m praštevilo, je $\mathbb{Z}_m$ tudi *polje*, saj ima v tem primeru vsak neničeln element $0_m \neq i_m \in \mathbb{Z}_m$ inverz za množenje. Če je m praštevilo, velja namreč

$$m|kj$$

natanko tedaj, ko $m|k$ ali $m|j$. V množici

$$\{k \cdot i; k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}\}$$

torej nobena dva različna elementa nista med seboj kongruentna in zato obstaja element $k_m \in \{1_m, \dots, (m-1)_m\}$, da je

$$k_m \cdot i_m = 1_m.$$

Podoben argument lahko pri splošnem m uporabimo le, če je število i tuje številu m . V $\mathbb{Z}_m$ ima inverz za množenje natanko vsak element $i_m \neq 0_m$, za katerega je i tuj številu m . Tako dobimo pravilo krajšanja

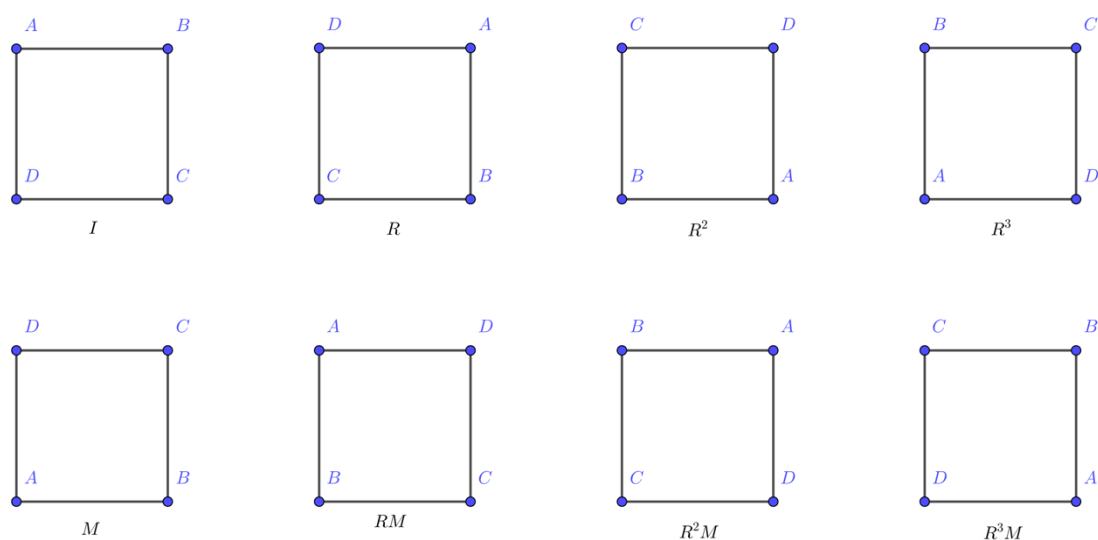
$$ac = bc \pmod{m} \Rightarrow a = b \pmod{m}, \text{ če sta si } c \text{ in } m \text{ tuja.}$$

Glavni viri za to poglavje so [13] in [14].

4.5 SIMETRIJE ŠAHOVNICE

Tako standardna kot modularna $n \times n$ šahovnica imata (ne le) za problem postavitve kraljic 8 različnih si simetrij: trivialno simetrijo, rotacije šahovnice v naprotni smeri urinega kazalca za 90° , 180° in 270° , zrcaljenji preko obeh diagonal ter zrcaljenji preko obeh simetral nasprotnih si stranic.

Te transformacije šahovnice lahko med seboj komponiramo, tako da najprej naredimo eno transformacijo šahovnice in nato še drugo. Če z R označimo vrtenje šahovnice (v nasprotni smeri urinega kazalca) za 90° , potem je $R \circ R = R^2$ vrtenje za 180° , $R \circ R \circ R = R^3$ vrtenje za 270° , $R \circ R \circ R \circ R = R^4$ pa je trivialna transformacija (identiteta I). Vsaka izmed rotacij ima tako svojo inverzno rotacijo: $R^{-1} = R^3$ in $(R^3)^{-1} = R$ (saj velja $R \circ R^3 = R^3 \circ R = I$), $(R^2)^{-1} = R^2$ ($R^2 \circ R^2 = I$). Ker za vsako od posameznih zrcaljenj velja, da če ga izvedemo dvakrat, dobimo identiteto, je vsako od štirih zrcaljenj inverzno samo sebi. Če označimo z M zrcaljenje šahovnice preko horizontalne simetrale stranic, je potem zrcaljenje preko prve glavne diagonale enako $R \circ M = RM$, kar pomeni, da najprej zrcalimo šahovnico preko horizontalne simetrale, potem pa zrcaljeno šahovnico še zavrtimo za 90° . Zrcaljenje preko druge diagonale je podobno enako $R^2 \circ M = R^2M$, zrcaljenje preko vertikalne simetrale pa je enako $R^3 \circ M = R^3M$.



Slika 12: Simetrije šahovnice

Grupa transformacij simetrij šahovnice je torej množica

$$D_4 = \{I, R, R^2, R^3, M, RM, R^2M, R^3M\},$$

na kateri je grupna operacija komponiranje podana z naslednjo *Cayleyevo tabelo*.

$\circ$	I	R	R^2	R^3	M	RM	R^2M	R^3M
I	I	R	R^2	R^3	M	RM	R^2M	R^3M
R	R	R^2	R^3	I	RM	R^2M	R^3M	M
R^2	R^2	R^3	I	R	R^2M	R^3M	M	RM
R^3	R^3	I	R	R^2	R^3M	M	RM	R^2M
M	M	R^3M	R^2M	RM	I	R^3	R^2	R
RM	RM	M	R^3M	R^2M	R	I	R^3	R^2
R^2M	R^2M	RM	M	R^3M	R^2	R	I	R^3
R^3M	R^3M	R^2M	RM	M	R^3	R^2	R	I

Opomba: Kot lahko opazimo, grupa D_4 simetrij šahovnice ni komutativna, saj na primer $RM \neq MR = R^3M$. Diederska grupa D_4 je poseben primer splošne diederske grupe D_n , ki je definirana kot grupa simetrij pravilnega n -kotnika P_n , njene elemente pa lahko dobimo z operacijami rotacije za $360^\circ/n$ in operacijami zrcaljenja preko diagonal n -kotnika.

S tem ko elementi grupe D_4 preslikajo šahovnico, preslikajo tudi polja šahovnice v (morda) druga polja šahovnice. Tako vsako postavitev kraljic preslikajo v morda neko novo postavitev kraljic na šahovnici. Če je prvotna postavitev kraljic predstavljala rešitev problema n kraljic, bo tudi preslikana postavitev predstavljala rešitev problema. Tako lahko razumemo, da elementi grupe D_4 delujejo na množici vseh rešitev problema n kraljic, tako za standardno kot za modularno šahovnico.

Grupo simetrij šahovnice torej lahko uporabimo tako, da iz neke rešitve problema n kraljic dobimo nove rešitve. Poglejmo si to na preprostem primeru rešitve $(3,1,4,2)$ za standardno 4×4 šahovnico, kar pomeni, da so kraljice postavljene na polja $(3,1)$, $(1,2)$, $(4,3)$ in $(2,4)$. Element (i,j) šahovnice se s transformacijo R preslika v $(j, 5-i)$, z zrcaljenjem M pa v $(5-i, j)$. Z rotacijo R se zaporedoma torej kraljice preslikajo na polja $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,1)$ in $(4,3)$. Čeprav se polja premešajo, pa dobimo isto rešitev problema. Zrcaljenje M pa nam zaporedoma polja preslika v $(2,1)$, $(4,2)$, $(1,3)$ in $(3,4)$, kar pa predstavlja novo rešitev $(2,4,1,3)$, ki pa je zopet *rotacijsko invariantna*. Vseh sedem

netrivialnih transformacij nam torej ne da sedmih novih rešitev, temveč le ene. Drugače bomo videli kasneje na primeru standardne šahovnice 8×8 , kjer pa večina rešitev ni invariantnih za noben element grupe D_4 .

Definicija: Množica rešitev problema n kraljic na standardni ali modularni $n \times n$ šahovnici je *fundamentalna množica rešitev*, če se nobeni dve različni si rešitvi iz te množice ne razlikujeta za nek element grupe D_4 in če lahko vse rešitve problema dobimo z uporabo transformacij iz grupe D_4 . Rešitvam iz fundamentalne množice rešitev rečemo *fundamentalne* ali *osnovne rešitve*.

Pri navajanju fundamentalnih rešitev (in tudi v primeru navajanja vseh rešitev), lahko rešitve navajamo glede na leksikografsko urejenost. Pri leksikografski urejenosti je rešitev $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ manjša od rešitve $(k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$, če obstaja tako število $1 \leq i \leq n$, da velja $k_j = k'_j$ za vsak $j < i$ in $k_i < k'_i$. Fundamentalne rešitve lahko torej izberemo tako, da iz vsakega ekvivalenčnega razreda rešitev izberemo najmanjšo rešitev glede na leksikografsko urejenost. Na ta način je množica fundamentalnih rešitev enolično določena.

Glavni vir za to poglavje je [15].

5. PRAKTIČNI DEL

Reševanje problema postavitve 8 kraljic na standardni 8×8 šahovnic je računalniško zelo kompleksen. Za 8 šahovskih figur obstaja na standardni šahovnici kar 4.426.165.368 ($64 \times 63 \times 62 \times \dots \times 1$) različnih postavitvev.

Za lažjo obravnavo si lahko zastavimo pravilo, ki pravi, da je lahko v enem stolpcu in vrstici le ena kraljica. S tem število apriornih možnih postavitvev znatno zmanjšamo na 40.320 ali $8!$. Vse te položaje računalnik lahko potem pregleda za možne napade po diagonalah. Za vsako permutacijo φ množice $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ torej pogledamo, ali sta funkciji $\varphi(x) - x$ in $\varphi(x) + x$ injektivni.

Preprost algoritem v Mathematici nam med vsemi permutacijami množice $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ najde tiste, ki predstavljajo rešitve problema 8 kraljic:

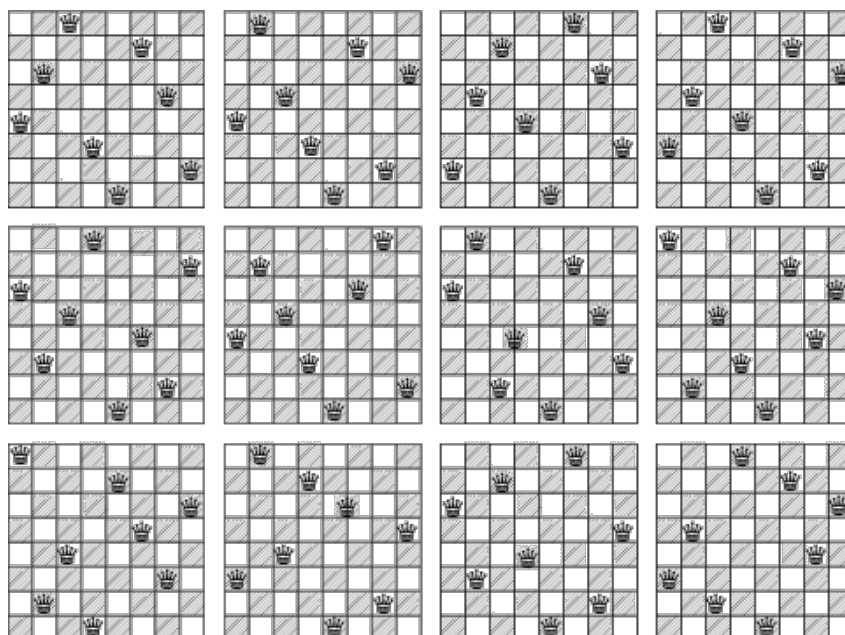
```
Ident = Table[i, {i, 8}];
```

```
Perm = Permutations[A];
```

```
Diag = (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@  
    Map[(# + Ident) &, Perm]))/8))  
(Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@  
    Map[(# - Ident) &, Perm]))/8));
```

```
Kraljice = DeleteCases[Diag*Perm, Table[0, {i, 8}]]
```

Za ta problem obstaja 92 različnih rešitev. Če pa rešitve, ki se med seboj razlikujejo le za bodisi zrcaljenje šahovnice preko diagonal oziroma simetral stranic, ali pa rotacij šahovnice za 90° , 180° in 270° štejemo kot eno, dobimo 12 osnovnih rešitev.



Slika 13: Osnovne rešitve za problem neodvisnosti na 8×8 šahovnici

Kot bomo videli v poglavju o štetju rešitev, imamo za vsako osnovno rešitev 8 rešitev (rotacija za 90° , 180° , 270° in zrcalna slika vsake rotacije), edina izjema je zadnja rešitev (4. stolpec, 3. vrstica), ki vključuje 4 rešitve, saj je osnovna rešitev enaka njeni rotaciji za 180° .

5.1 OBSTOJ REŠITEV ZA PROBLEM n KRALJIC

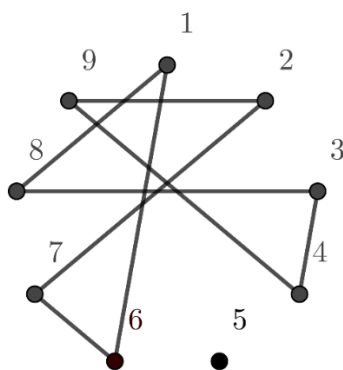
V tem razdelku pogledimo, kako je z obstojem rešitev problema n kraljic pri standardnih in pri modularnih $n \times n$ šahovnicah za poljubne $n \in \mathbb{N}$. Pri nizkih vrednostih n znamo brez posebnih težav poiskati vse rešitve, za višje vrednosti n pa problem ni več preprost.

Začnimo pri šahovnici 1×1 . V tem primeru imamo očitno rešitev, ko kraljico postavimo na edino možno polje. Pri šahovnici 2×2 je problem nerešljiv, saj ena sama kraljica, ki je postavljena na katero koli polje 2×2 šahovnice, napada vsa ostala polja. Prav tako nimamo rešitve pri 3×3 šahovnici, kar se lahko hitro prepričamo s postavljanjem kraljic na šahovnico. Mi pa si tukaj raje oglejmo, kako lahko to hitro vidimo s pomočjo kraljičinega grafa.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

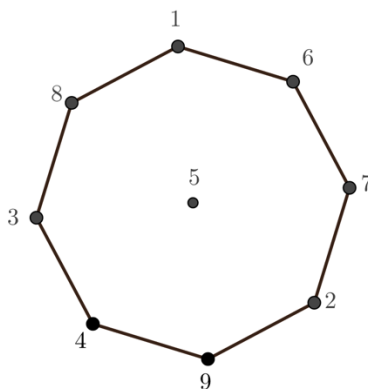
Slika 14: Način označevanja polj

Označimo polja na šahovnicah, kot je prikazano na sliki 9. Komplement kraljičinega 3-grafa je graf, pri katerem povežemo s povezavami natanko tista vozlišča, pri katerih se ustrezna polja med seboj ne napadajo. V takem grafu najdemo ustrezne postavitve n kraljic kot polne podgrafe reda n .



Slika 15: Komplement kraljičinega 3-grafa

Graf ima dve komponenti: ciklični graf na 8-točkah in prazen graf na 1 točki.



Slika 16: Ciklični komplement kraljičinega 3-grafa

Ta graf seveda nima nobenega polnega podgrafa reda 3, saj imajo vsa vozlišča red bodisi 0 bodisi 2.

Poglejmo si izrek, ki nam pove, da lahko za vsak $n > 3$ postavimo n kraljic na standardno $n \times n$ šahovnico tako, da se medsebojno ne napadajo.

Izrek: Za vsak $n > 3$ lahko na standardno $n \times n$ šahovnico postavimo n kraljic tako, da se paroma ne napadajo.

Dokaz: Izrek bomo dokazali tako, da bomo, glede na ostanke števila n pri deljenju s 6, rešitev konkretno zapisali v obliki permutacije $\varphi: \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (stolpce in vrstice šahovnice bomo označili s števili $0, 1, \dots, n-1$, namesto običajne označitve z $1, 2, \dots, n$).

Predpostavimo najprej, da je ostanek pri deljenju števila n s številom 6 enaka 1 ali 5, naj bo $\varphi(k) = 2k \pmod{n}$. Poglejmo najprej, da je φ permutacija. Naj bosta k in l elementa množice $\{0, 1, \dots, n-1\}$, za katera velja $2k = 2l \pmod{n}$ in predpostavimo, da je $k \geq l$. Potem velja $2(k-l) = 0 \pmod{n}$ oziroma $n \mid 2(k-l)$. Ker je n tuj 2, to pomeni $6 \mid (k-l)$. Ker je $0 \leq (k-l) < n$, je to možno le, če je $k = l$. Poglejmo sedaj še, da sta $\varphi(k) + k$ in $\varphi(k) - k$ injektivni preslikavi. Pokazali bomo še več, in sicer, da sta $(\varphi(k) + k) \pmod{n}$ in $(\varphi(k) - k) \pmod{n}$ permutaciji. V našem primeru je $\varphi(k) + k = 3k \pmod{n}$ in $\varphi(k) - k = k \pmod{n}$. Slednja je seveda permutacija, saj je enaka identiteti. Naj bosta zopet k in l elementa množice $\{0, 1, \dots, n-1\}$, za katera velja $3k = 3l \pmod{n}$ in predpostavimo, da je $k \geq l$. Potem $n \mid 3(k-l)$. Ker sta si n in 3 tuji števili, velja $n \mid (k-l)$, in je zato zopet $k = l$. S tem smo pokazali, da je φ

v tem primeru ne le rešitev problema n kraljic, ampak je tudi rešitev problema n kraljic za modularno $n \times n$ šahovnico.

Predpostavimo sedaj, da je ostanek števila n pri deljenju s številom 6 enak 0 ali 4 in naj bo φ rešitev iz prejšnje točke za $(n+1) \times (n+1)$ šahovnico. Če iz $(n+1) \times (n+1)$ šahovnice odstranimo prvi stolpec in prvo vrstico (in s tem kraljico na polju (0,0)), nam preostale kraljice dajo rešitev za $n \times n$ šahovnico.

Naj bo sedaj ostanek pri deljenju števila n s številom 6 enak 2. V tem primeru naj bo

$$\varphi(k) = \begin{cases} 2k + \frac{n-2}{2} \pmod{n}; & 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2} \\ n-1-\varphi(n-1-k); & \frac{n}{2} \leq k \leq n-1 \end{cases}.$$

Poglejmo, da nam skonstruirana preslikava predstavlja rešitev. Preverimo najprej, da je φ permutacija. Naj bosta najprej $\frac{n-2}{2} \geq k \geq l \geq 0$. Potem je $\varphi(k) = \varphi(l)$ natanko tedaj, ko velja $2k + \frac{n-2}{2} = 2l + \frac{n-2}{2} \pmod{n}$ oziroma $n|2(k-l)$. Ker velja $n-2 \geq 2(k-l) \geq 0$, je to le, če je $k = l$. Naj bosta sedaj $\frac{n}{2} \leq l \leq k \leq n-1$. Potem je $\varphi(k) = \varphi(l)$ natanko tedaj, ko velja $n-1-\varphi(n-1-k) = n-1-\varphi(n-1-l)$ oziroma $\varphi(n-1-k) = \varphi(n-1-l)$. Ker velja $0 \leq n-1-k \leq \frac{(n-2)}{2}$ in $0 \leq n-1-l \leq \frac{(n-2)}{2}$, dobimo $n-1-l = n-1-k$ in tako $n = k$. Ostane nam še primer, ko je $0 \leq l \leq \frac{n-2}{2}$ in $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$. Potem je $\varphi(k) = \varphi(l)$ natanko tedaj, ko velja $n-1-\varphi(n-1-k) = \varphi(l) \pmod{n}$. Dobimo $n-1-2(n-1-k) - \frac{n-2}{2} = 2l + \frac{n-2}{2} \pmod{n}$, kar je enako $3 = 2(l-k) \pmod{n}$ oziroma $n|(3+2(k-l))$. Zato je bodisi $3+2(k-l) = n$, bodisi $3+2(k-l) = 2n$. Oboje ni možno, saj 2 deli n in deli $2(k-l)$, ne deli pa 3. Sedaj pogledajmo, da je $\varphi(k) + k$ injektivna. Vzemimo najprej $\frac{n-2}{2} \geq k \geq l \geq 0$ in predpostavimo, da je $\varphi(k) + k = \varphi(l) + l \pmod{n}$. Dobimo enakost $3k + \frac{n-2}{2} = 3l + \frac{n-2}{2} \pmod{n}$, in zato $n|3(k-l)$. Ker sta si n in 3 tuja, mora veljati $k = l$. Naj bosta sedaj $\frac{n}{2} \leq l \leq k \leq n-1$. Enakost $\varphi(k) + k = \varphi(l) + l \pmod{n}$ nam da $n-1+\varphi(n-1-k) + k = n-1+\varphi(n-1-l) + l \pmod{n}$, kar je enako $n-1-2(n-1-k) - \frac{n-2}{2} + k = n-1-2(n-1-l) - \frac{n-2}{2} + l \pmod{n}$ in po krajšanju $3(k-l) = 0 \pmod{n}$. Ker sta si n in 3 tuji, je $k = l$. V teh dveh primerih se kraljice torej ne napadajo niti po podaljšanih naraščajočih diagonalah. Če pa je $0 \leq l \leq$

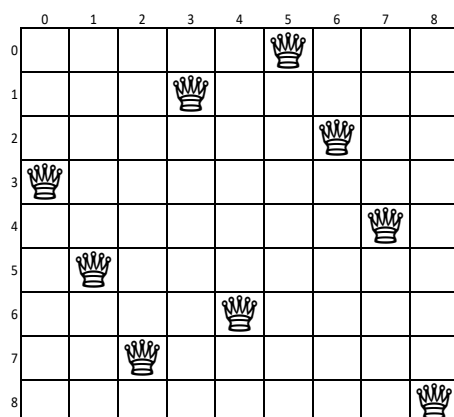
$\frac{n-2}{2}$ in $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$, je $\varphi(k) + k = \varphi(l) + l \pmod{n}$ enak $3l + \frac{n-2}{2} = n - 1 - 2(n-1-k) - \frac{n-2}{2} + k \pmod{n}$ oziroma $3(l-k) = 3 \pmod{n}$. Ker sta si n in 3 tuji, lahko krajšamo in dobimo $l-k = 1 \pmod{n}$, kar je možno le, če je $k = n-1$ in $l = 0$. V tem primeru se kraljici, postavljeni na polji $(0, \frac{n-2}{2})$, in $(n-1, \frac{n}{2})$ napadata po podaljšani naraščajoči diagonali, seveda pa velja $0 + \frac{n-2}{2} \neq (n-1) + n/2$, zato se kraljici ne napadata po običajni naraščajoči diagonali. Preverimo še injektivnost preslikav $\varphi(k) - k$. Če velja $\frac{n-2}{2} \geq k \geq l \geq 0$ ali $\frac{n}{2} \leq l \leq k \leq n-1$, zopet lahko pogledamo celo podaljšane diagonale in relacijo preverimo kar glede na ostanke pri deljenju n . V prvem primeru imamo $2k + \frac{n-2}{2} - k = 2l - \frac{n-2}{2} - l \pmod{n}$, kar nam da $k-l = 0 \pmod{n}$ in zato $k = l$. Podobno je v drugem primeru: $n-1-2(n-1-k) - \frac{n-2}{2} - k = n-1-2(n-1-k) - \frac{n-2}{2} - k \pmod{n}$, kar je zopet $k-l = 0 \pmod{n}$ in zope $k = l$. V primeru $0 \leq l \leq \frac{n-2}{2}$ in $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$ relacijo prav tako najprej preverimo glede na ostanke pri deljenju z n : $n-1-2(n-1-k) - \frac{n-2}{2} - k = 2l + \frac{n-2}{2} - l \pmod{n}$. Po krajšanju dobimo $k-l = n-3 \pmod{n}$. Dobimo tri možnosti: $l = 0$ in $k = n-3$, $l = 1$ in $k = n-2$ ter $l = 2$ in $k = n-1$. Kraljice so v teh primerih postavljene na polja $(0, \frac{n-2}{2})$ in $(n-3, \frac{n-8}{2})$, $(1, \frac{n+2}{2})$ in $(n-2, \frac{n-4}{2})$ ter $(2, \frac{n+4}{2})$ in $(n-1, \frac{n}{2})$. Ker $\frac{n-2}{2} - 0 \neq \frac{n-8}{2} - (n-3)$ in $\frac{n+2}{2} - 1 \neq \frac{n-4}{2} - (n-2)$ ter $\frac{n+4}{2} - 2 \neq \frac{n}{2} - (n-1)$, se noben par teh kraljic ne napada po običajnih padajočih diagonalah.

Ostane nam zgolj še primer, ko je ostanek pri deljenju števila n s 6 enak 3 . V tem primeru vzemimo zgoraj skonstruirano rešitev za šahovnico $(n-1) \times (n-1)$ in ji dodamo dodatno vrstico ter stolpec, zadnjo kraljico pa postavimo na polje $(n-1, n-1)$. Ker nobena od kraljic na $(n-1) \times (n-1)$ šahovnici ni postavljena na glavni padajoči diagonali, dobimo rešitev. Q.E.D.

Primer: Vzemimo standardno 9×9 šahovnico. Ker je ostanek pri deljenju 9 s 6 enak 3 , vzemimo najprej 8×8 šahovnico. Zgornji postopek nam da permutacijo φ množice $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$$\varphi(k) = \begin{cases} 2k + 3 \pmod{8}; & 0 \leq k \leq 3 \\ 7 - \varphi(7-k); & 4 \leq k \leq 7 \end{cases},$$

in s tem rešitev $\varphi = (3,5,7,1,6,0,2,4)$. Za rešitev problema za šahovnico 9×9 lahko potem vzamemo kar $(3,5,7,1,6,0,2,4,8)$.



Slika 17: Rešitev za standardno 9×9 šahovnico

Poglejmo si sedaj še, kako je z obstojem rešitev problema n kraljic pri modularnih šahovnicah. Trivialna rešitev pri 1×1 šahovnici je seveda modularna. Ker je vsaka modularna rešitev tudi rešitev za standardno šahovnico, problema ne moremo rešiti pri šahovnicah 2×2 in 3×3 . Hitro bi se lahko tudi prepričali, da je problem nerešljiv za 4×4 šahovnice. Pri $n = 5$ smo v zgornjem izreku skonstruirali modularno rešitev, in sicer $(0,2,4,1,3)$. Bolj splošno si pogledjmo naslednji izrek.

Izrek: Na modularno $n \times n$ šahovnico postavimo n kraljic tako, da se paroma ne napadajo, natanko tedaj ko sta si števili n in 6 tuji.

Dokaz: V dokazu prejšnjega izreka smo videli, da rešitev za modularne šahovnice dejansko obstaja, če sta si n in 6 tuji si števili.

Pokažimo še obrat. Naj bo φ permutacija števil $\{0,1,2, \dots, n-1\}$, ki predstavlja modularno rešitev. Pri dokazu uporabimo dejstvo, da sta poleg φ permutaciji elementov $\{0,1,2, \dots, n-1\}$ tudi $\varphi(k) - k \pmod{n}$ in $\varphi(k) + k \pmod{n}$.

Poglejmo najprej, da je n liho število. Označimo

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Potem velja

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(k) - k) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) - \sum_{k=0}^{n-1} k = 0,$$

saj je φ permutacija. Ker je $\varphi(k) - k \pmod{n}$ tudi permutacija, velja

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(k) - k) = \sum_{k=0}^{n-1} k \pmod{n}.$$

Skupaj dobimo

$$S_1 = \frac{n(n-1)}{2} = 0 \pmod{n}.$$

Zato za nek $m \in \mathbb{N}$ velja

$$2mn = n(n-1)$$

oziroma

$$n = 2m + 1.$$

S tem smo pokazali, da je n lih. Poglejmo podobno, da n ni deljiv s 3. Označimo

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Ker sta $\varphi(k) - k \pmod{n}$ in $\varphi(k) + k \pmod{n}$ permutaciji, imamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(k) - k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k)^2 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k\varphi(k) + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = S_2 \pmod{n}$$

in

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(k) + k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k)^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} k\varphi(k) + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = S_2 \pmod{n}.$$

Če upoštevamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k)^2 = S_2,$$

iz prve zgornje enačbe dobimo

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} k\varphi(k) = S_2 \pmod{n},$$

če pa obe enačbi odštejemo, pa dobimo

$$4 \sum_{k=0}^{n-1} k\varphi(k) = 0 \pmod{n}.$$

Skupaj imamo tako

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{3} = 0 \pmod{n}.$$

Obstaja torej $m \in \mathbb{N}$, da je

$$3m = (n-1)(2n-1).$$

Ker je 3 praštevilo, mora 3 deliti bodisi $n-1$, bodisi $2n-1$. V prvem primeru je $n = 1 \pmod{3}$, v drugem pa je $n = 2 \pmod{3}$.

Skupaj smo pokazali, da n ni deljiv niti z 2, niti s 3, kar natanko pomeni, da sta si n in 6 tuji si števili. Q.E.D.

5.2 ŠTEVILO REŠITEV PROBLEMA n KRALJIC

V tem razdelku bomo pogledali nekaj rezultatov v zvezi s številom različnih postavitvev n ne napadajočih kraljic na bodisi standardno, bodisi modularno $n \times n$ šahovnico. Označimo z $Q(n)$ število vseh možnih postavitvev kraljic na šahovnico $n \times n$, ki se paroma ne napadajo, in z $T(n)$ število vseh možnih postavitvev kraljic na modularno šahovnico $n \times n$, ki se paroma ne napadajo. V prejšnjem razdelku smo videli, da je $Q(n) > 0$, če je $n = 1$ ali $n > 3$, in da je $T(n) > 0$ natanko tedaj, ko je n tuj 6.

Poglejmo si najprej standardne šahovnice. Začnimo pri šahovnici 1×1 . Za to šahovnico očitno velja, da je $Q(1) = 1$. Za šahovnico 2×2 velja $Q(2) = 0$, saj ena sama kraljica, ki je postavljena na katero koli polje 2×2 šahovnice, napada vsa ostala polja. Prav tako smo videli, da velja $Q(3) = 0$, saj v tem primeru nimamo rešitev.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
splošne rešitve	1	0	0	2	10	4	40	92	352
osnovne rešitve	1	0	0	1	2	1	6	12	46

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
splošne rešitve	724	2680	14200	73,712	365,596	2,279,184	1,5E+07	9,6E+07	6,7E+08
osnovne rešitve	92	341	1,787	9,233	45,752	285,053	1,8E+06	1,2E+07	8,3E+07

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27
splošne rešitve	5,0E+09	3,9E+10	3,1E+11	2,7E+12	2,4E+13	2,3E+14	2,2E+15	2,2E+16	2,3E+17
osnovne rešitve	6,2E+08	4,9E+09	3,9E+10	3,4E+11	3,0E+12	2,8E+13	2,8E+14	2,8E+15	2,9E+16

Slika 18: Tabela vseh znanih rešitev problema n kraljic na standardnih šahovnicah

Naslednji kratek program v Mathematici nam pri poljubnem n prešteje število vseh rešitev.

```
A = Table[{i, n}];
```

```
Perm = Permutations[A];
```

```
Diag = (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@
```

```
Map[(# + A) &, Perm])) /
```

```
n)) (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@
```

Map[(# - A) &, Perm]))/n));

*SteviloResitev = Length[DeleteCases[Diag*Perm, Table[0, {i, n}]]]*

Zgornji algoritem zagotovo ni optimalen, vendar ima vsak algoritem za izračun rešitev problema kraljic eksponentno časovno zahtevnost, zato nam ne omogoča izračuna rešitev pri večjih vrednostih n .

n	Čas(s)
4	0.02
5	0.02
6	0.02
7	0.03
8	0.17
9	1.53
10	15.57
11	333.38

Slika 19: Časovna zahtevnost algoritma za različne n

Če želimo poiskati le fundamentalne rešitve problema kraljic, lahko to storimo tako, da vzamemo seznam vseh rešitev, za vsako rešitev iz seznama zapišemo njen ekvivalenčni razred rešitev (tako, da na vsaki od rešitev uporabimo vseh osem elementov grupe D_4), in nato izbrišemo ponavljajoče se ekvivalenčne razrede. Algoritem zopet ni optimalen, zlahka pa ga uporabimo pri reševanju problema osmih kraljic. Spodaj je napisan kratek program v Mathematici, ki nam poišče vse fundamentalne rešitve za problem 8 kraljic za standardno šahovnico. Program nam vrne seznam fundamentalnih rešitev, skupaj s številom elementov v vsakem ekvivalenčnem razredu rešitve.

n = 8;

A = Table[i, {i, n}];

Perm = Permutations[A];

Diag = (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@

Map[(# + A) &, Perm]))/

n)) (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@

Map[(# - A) &, Perm]))/n));

*Kraljice = DeleteCases[Diag*Perm, Table[0, {i, n}]];*

M[list_List] := Table[n + 1, {i, n}] - list;

```

R[list_List] :=
  Table[Sort[Table[{n + 1 - list[[i]], i}, {i, n}]]][[j]][[2]], {j, n}];
Ekvilist[l_List] :=
  Map[DeleteDuplicates,
    DeleteDuplicates[
      Map[Sort,
        Table[{l[[i]], R[l[[i]]], R[R[l[[i]]],
          R[R[R[l[[i]]]]], M[l[[i]]], R[M[l[[i]]]],
          R[R[M[l[[i]]]]], R[R[R[M[l[[i]]]]]]}, {i,
            Length[l]}]]];
EquivalentClasses = Ekvilist[Kraljice]
NumberFundamental = Length[EquivalentClasses]

```

Rezultat programa je seznam:

```

{{{1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4}, 8}, {{1, 6, 8, 3, 7, 4, 2, 5}, 8},
{{2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5}, 8}, {{2, 5, 7, 1, 3, 8, 6, 4}, 8},
{{2, 5, 7, 4, 1, 8, 6, 3}, 8}, {{2, 6, 1, 7, 4, 8, 3, 5}, 8},
{{2, 6, 8, 3, 1, 4, 7, 5}, 8}, {{2, 7, 3, 6, 8, 5, 1, 4}, 8},
{{2, 7, 5, 8, 1, 4, 6, 3}, 8}, {{3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6}, 4},
{{3, 5, 8, 4, 1, 7, 2, 6}, 8}, {{3, 6, 2, 5, 8, 1, 7, 4}, 8}}.

```

Vidimo torej, da je število fundamentalnih rešitev 12 in da je v ekvivalenčnem razredu sedmih fundamentalnih rešitev maksimalno število elementov, 8, ena od rešitev pa ima v svojem ekvivalenčnem razredu 4 rešitve.

Če oba algoritma poženemo za majhne vrednosti n , dobimo tabelo števila rešitev in števila fundamentalnih rešitev.

Zgornja algoritma lahko zlahka spremenimo tako, da dobimo rešitve za modularno šahovnico. Napišimo le algoritem za splošne rešitve, saj je algoritem za iskanje fundamentalnih rešitev identičen za oba problema.

```

A = Table[i, {i, 0, n - 1}];

```

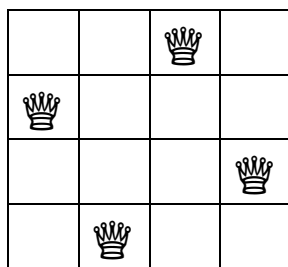
$Perm = Permutations[A];$

$Diag = (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@$
 $Mod[Map[(\# + A) \&, Perm], n])) /$
 $n)) (Floor /@ ((Length /@ (DeleteDuplicates /@$
 $Mod[Map[(\# - A) \&, Perm], n])) / n));$

$SteviloResitevT =$

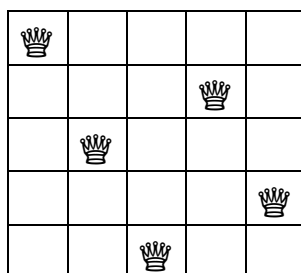
$Length[DeleteCases[Diag*Perm, Table[0, \{i, 0, n - 1\}]]]$

Čeprav ni enostavnega algoritma, kako rešitve na večjih šahovnicah dobimo s kombiniranjem rešitev na manjših šahovnicah, pa je to v določenih primerih vseeno mogoče. Vzemimo na primer rešitev



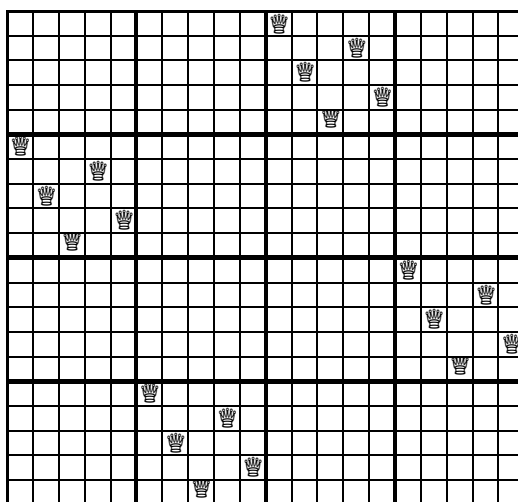
Slika 20: Rešitev za standardno 4×4 šahovnico

za standardno 4×4 šahovnico in rešitev



Slika 21: Rešitev za modularno 5×5 šahovnico

za modularno 5×5 šahovnico. Potem lahko obe rešitvi kombiniramo v rešitev za standardno $20 = 4 \cdot 5$ šahovnico, kot je to prikazano na sliki.



Slika 22: Kombinirana rešitev

Pokazali bomo bolj splošno trditev, pri kateri bomo predpostavili, da se pri šahovnicah številčenje stolpcev in vrstic začne z 0 in ne 1. Postopek kombiniranja rešitev, ki je predstavljen v nadaljevanju, smo povzeli po [16].

Trditev: Naj bo n tuj številu 6 in m poljubno naravno število. Naj bo ψ rešitev za modularno $n \times n$ šahovnico in $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ poljubne (ne nujno različne) rešitve za standardno $m \times m$ šahovnico. Potem je permutacija množice $\{0, 1, \dots, mn - 1\}$, podana z

$$\phi(kn + l) = \varphi_l(k)n + \psi(l); \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, l = 0, 1, \dots, n - 1$$

rešitev za standardno $mn \times mn$ šahovnico.

Dokaz: Najprej pogledjmo, da je preslikava ϕ dejansko preslikava množice $\{0, 1, \dots, mn - 1\}$ vase. Vsako število med 0 in $mn - 1$ lahko zapišemo kot $kn + l$, kjer sta k in l enolično določena, $k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}, l \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Zato je domena preslikave množica $\{0, 1, \dots, mn - 1\}$. Prav tako je slika preslikave ϕ množica $\{0, 1, \dots, mn - 1\}$, ker je slika φ_l množica $\{0, 1, \dots, m - 1\}$, slika ψ pa množica $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, in je zato $\phi(kn + l)$ največ $(m - 1)n + n - 1 = mn - 1$ in najmanj $0n + 0 = 0$. Pogledjmo sedaj, da je ϕ permutacija. Naj bodo k, l in k', l' taki, da velja

$$\varphi_l(k)n + \psi(l) = \varphi_{l'}(k')n + \psi(l').$$

Če enakost pogledamo glede na ostanke pri deljivosti z n , dobimo $\psi(l) = \psi(l')$. Ker je ψ permutacija, je $l = l'$. Zato mora veljati $\varphi_l(k)n = \varphi_l(k')n$. Ker je $n \neq 0$ in je φ_l permutacija, je $k = k'$. Torej je ϕ injektivna in zato permutacija. Preveriti moramo še, da se kraljice ne napadajo po diagonalah, kar pomeni, da

sta preslikavi $\phi(kn + l) + (kn + l)$ in $\phi(kn + l) - (kn + l)$ obe injektivni. Naj bodo zopet k, l in k', l' taki, da velja

$$\varphi_l(k)n + \psi(l) + (kn + l) = \varphi_{l'}(k')n + \psi(l') + (k'n + l').$$

Po modulu n enakost postane

$$\psi(l) + l = \psi(l') + l' \pmod{n}.$$

Ker je ψ modularna rešitev, je $l = l'$. Prvotna enačba sedaj postane

$$\psi_l(k)n + kn = \varphi_l(k')n + k'n.$$

Če delimo enakost z n in upoštevamo, da je φ_l rešitev, dobimo $k = k'$. Enako preverimo tudi, da se kraljice ne napadajo na padajočih diagonalah.

$$\psi_l(k)n + \psi(l) - (kn + l) = \varphi_{l'}(k')n + \psi(l') - (k'n + l').$$

Po modulu n enakost postane

$$\psi(l) - l = \psi(l') - l' \pmod{n}.$$

Ker je ψ modularna rešitev, je zopet $l = l'$ in nadalje dobimo

$$\psi_l(k)n - kn = \varphi_l(k')n - k'n,$$

in ker upoštevamo, je φ_l rešitev, $k = k'$. Q.E.D.

Posledica trditve je naslednja ocena o številu rešitev.

Posledica: Za vsaki naravni števili n, m velja neenakost

$$Q(mn) \geq Q(m)^n T(n).$$

Dokaz: Ker so pri različnih naborih rešitev $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ in različnih ψ rešitve iz prejšnje trditve vse očitno si med seboj različne, je rezultat direktna posledica zgornje trditve. Upoštevati moramo samo še, da je pri številih n , ki niso tuja 6, trditev očitno pravilna, saj je v tem primeru desna stran enaka 0. Q.E.D.

V primeru, ko je n praštevilo, lahko oceno za število rešitev dobimo iz naslednje trditve.

Trditev: Če je p praštevilo in je $p > 3$, je preslikava ψ , definirana kot

$$\psi(k) = ak + b \pmod{p}$$

za vsak $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$ in vsak $b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ rešitev problema kraljic za modularno $p \times p$ šahovnico.

Dokaz: Preverimo najprej, da je ψ permutacija množice $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Naj bosta $k, k' \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ taka, da velja

$$ak + b = ak' + b \pmod{p}.$$

Potem je $ak = ak' \pmod{p}$ in ker je p praštevilo, je $a \neq 0$ tuj p in lahko krajšamo. Dobimo $k = k'$. Preverimo še napadanje po diagonalah. Če velja

$$ak + b + k = ak' + b + k' \pmod{p},$$

dobimo $(a+1)k = (a+1)k' \pmod{p}$. Ker $a \neq p-1$, lahko zopet krajšamo, in dobimo $k = k'$. Podobno dobimo za padajoče diagonale.

$$ak + b - k = ak' + b - k' \pmod{p}$$

in zato $(a-1)k = (a-1)k' \pmod{p}$. Ker $a \neq 1$, lahko zopet krajšamo, in dobimo $k = k'$. Q.E.D.

Kot posledico dobimo:

Posledica: Če je $p > 3$ praštevilo, velja $T(p) \geq p(p-3)$.

Obe posledici skupaj nam omogočata, da dobimo konkretne ocene za število rešitev. Poglejmo si primer.

Primer: Poiščimo oceno za število rešitev problema 25 kraljic za standardno 25×25 šahovnico. Ker je $25 = 5 \cdot 5$, dobimo oceno

$$Q(25) \geq Q(5)^5 T(5).$$

Ker je 5 praštevilo, imamo za $T(5)$ oceno $T(5) \geq 5 \cdot 2 = 10$. Ker je $Q(n) \geq T(n)$ imamo tudi za $Q(5)$ oceno $Q(5) \geq 10$ (v tem primeru sicer poznamo obe vrednosti, $Q(5) = T(5) = 10$). Skupaj dobimo

$$Q(25) \geq 10^5 \cdot 10 = 10^6.$$

Iz tabele s številom rešitev vidimo, da nam postopek kombiniranja rešitev, da le manjši del rešitev produktne šahovnice, saj je $Q(25)$ reda velikosti 10^{15} . Na podoben način lahko dobimo oceno za poljubno število, ki ima v svojem praštevilske razcepu praštevila večja od 3. Poglejmo si na primer oceno za $Q(7000)$. Praštevilske razcep števila 7000 je

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

Ker je $Q(8) = 92$, je

$$Q(2^3 \cdot 5) \geq 92^5 T(5) = 10 \cdot 92^5.$$

Nadalje je

$$Q(2^3 \cdot 5 \cdot 5) \geq (10 \cdot 92^5)^5 T(5) = 10^6 \cdot 92^{25}$$

in nato

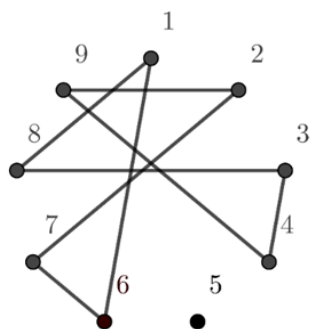
$$Q(2^3 \cdot 5^2 \cdot 5) \geq (10^6 \cdot 92^{25})^5 T(5) = 10^{31} \cdot 92^{125}.$$

Če uporabimo še kombiniranje z rešitvami za 7×7 šahovnico, dobimo končno

$$Q(7000) = Q(2^3 \cdot 5^3 \cdot 7) \geq (10^{31} \cdot 92^{125})^7 T(7) \geq 10^{217} \cdot 92^{875} \cdot 7 \cdot 4 \\ > 10^{1936}.$$

5.3 SPLOŠNE ŠAHOVNICE IN POSPLOŠENI KRALJIČINI GRAFI

Grafični prikaz šahovnic je pri problemu n kraljic za manjše šahovnice res zelo prikladen. Iz grafa lahko dokaj preprosto izluščimo rešitev, saj je število vseh povezav dokaj majhno in nas tako ne zmede preveč.



Slika 23: Komplement kraljičinega grafa standardne 3×3 šahovnice

V komplementu kraljičinega grafa standardne 3×3 šahovnice, zlahka vidimo, da je največji poln podgraf grafa G , ravno graf reda 2. To seveda pomeni, da lahko na to šahovnico postavimo le dve ne napadajoči se kraljici, kar pomeni, da problem tu nima rešitve.

Problem kraljic lahko obravnavamo tudi za bolj splošne šahovnice. Splošna šahovnica je vsaka podmnožica polj neke $n \times n$ šahovnice. Prav tako lahko za tako šahovnico definiramo kraljičin graf na analogen način kot za standardno $n \times n$ šahovnico. Problem kraljic za splošne šahovnice torej lahko razumemo kot problem kraljic za standardno $n \times n$ šahovnico, pri čemer pa določimo le nekatera polja, na katerih dovolimo postavitev kraljic. Več o posplošenih kraljičinih grafih si lahko bralec prebere v [17].

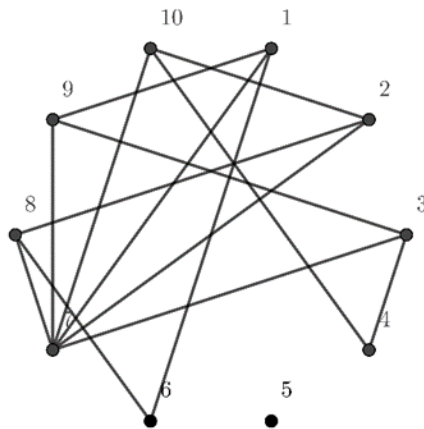
Poskusimo uporabiti kraljičine grafe (ali njihove komplemente), da najdemo rešitve za nekatere bolj nenavadne šahovnice.

1. primer: Narišimo kraljičin graf za naslednjo šahovnico.

1	2	3			
4	5	6			7
8	9	10			

Slika 24: Nenavadna šahovnica 1

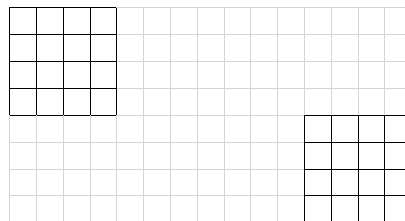
Ker je ta šahovnica majhna, narišimo raje komplement kraljičinega grafa.



Slika 25: Graf za nenavadno šahovnico 1

Zgrafa lahko razberemo, da je najvišje število neodvisnih kraljic na tej šahovnici 3. Če v grafu preštejemo vse klike velikosti 3, ugotovimo tudi, da imamo 4 možne postavitve treh kraljic : $\{1,7,9\}$, $\{2,7,10\}$, $\{2,7,8\}$, $\{3,7,9\}$.

2. primer: Pogledjmo si naslednjo šahovnico:



Slika 26: Nenavadna šahovnica 2

Šahovnica je očitno sestavljena iz dveh 4×4 šahovnic, a če pogledamo še natančneje, vidimo, da sta šahovnici med seboj popolnoma neodvisni. To pomeni, da na katero koli polje šahovnice A postavimo kraljico, ta ne bo napadala nobenega polja šahovnice B .

Na tako šahovnico lahko postavimo $n_A + n_B$ kraljic oziroma maksimalno število kraljic, ki jih lahko postavimo na A , plus maksimalno število kraljic, ki jih lahko postavimo na B .

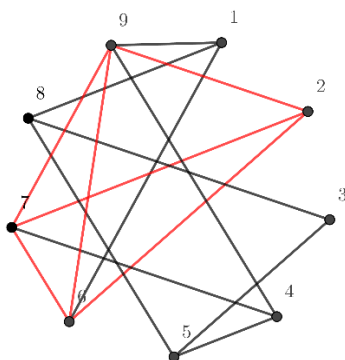
Število različnih postavitvev n kraljic na šahovnico pa je število rešitev šahovnice A pomnoženo s številom rešitev šahovnice B , $Q(m) = Q(n_A) \times Q(n_B)$. To pomeni, da lahko na šahovnico postavimo 8 kraljic na 4 različne načine.

3. primer:

1	2	3	4
5			6
7			8
		9	

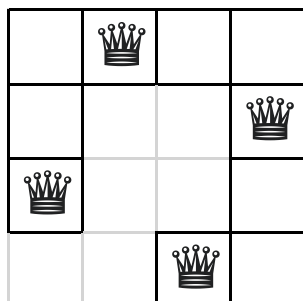
Slika 27: Nenavadna šahovnica 3

Pri bolj čudnih šahovnicah je morda težje na prvi pogled oceniti, koliko neodvisnih kraljic lahko nanjo postavimo. Ravno v ta namen je uporabno narisati grafični prikaz problema. Na naslednji sliki 28 lahko vidimo komplement kraljičinega grafa te šahovnice.



Slika 28: Graf za nenavadno šahovnico 3

Ker gre za komplement kraljičinega grafa, rešitev predstavlja poln podgraf največjega reda. Za to šahovnico je to podgraf reda 4 (na sliki je označen z rdečo barvo). Na šahovnico lahko postavimo največ 4 neodvisne kraljice, in to samo na en način, ki ga lahko vidimo na sliki 28.



Slika 29: Edina rešitev za nenavadno šahovnico 3

6. ZAKLJUČEK

Na začetku raziskovalne naloge sem si postavili tri hipoteze. V tem poglavju jih bom ponovno ovrednotil in navedel nekatere podobne probleme, ki bi jih lahko nadaljnje raziskoval.

1. Hipoteza: Za standardne kvadratne šahovnice, kjer je $n > 3$, vedno obstaja rešitev problema neodvisnosti za kraljice.

Glede na dokaz v poglavju 5.1 Obstoj rešitev za problem n kraljic lahko to hipotezo potrdimo, saj lahko vsaj eno rešitev za poljubno $n \times n$ šahovnico za $n > 3$ dobimo s sledenjem pravila stopnišča.

2. Hipoteza: Za kvadratne šahovnice lahko izdelamo algoritem, ki bo izračunal število različnih postavitv kraljic.

Ker mi je program v Mathematici uspelo napisati, lahko tudi to hipotezo potrdim. Res pa je, da bi bil program lahko kar precej izboljššan, saj že pri šahovnici $n = 11$ potrebuje približno 6 minut.

3. Hipoteza: Za število rešitev za standardne šahovnice lahko s pomočjo matematičnih postopkov najdemo dobro spodnjo mejo.

Hipotezo lahko deloma potrdim, saj je v določenih primerih možno napisati spodnjo omejitev za število možnih rešitev za problem. Te ocene pa so še vedno dokaj grobe. Najboljša spodnja meja, ki jo lahko izračunamo pri $n = 25$, je reda 10^6 , medtem ko je število rešitev reda 10^{15} .

Problem je zelo zanimiv in terja še več raziskovanja. Zajema veliko različnih vej matematike in je vseeno dovolj preprosto razumljiv, da sem se ga lahko lotil brez posebnega predznanja.

7. LITERATURA

- [1] M. Bezzel, „Proposal of 8-queens problem,“ *Berliner Schachzeitung*, Izv. 3, 1848.
- [2] F. Nauck, „Briefwechseln mit allen für alle,“ *Illustrierte Zeitung*, Izv. 15, št. 377, 1850.
- [3] E. Pauls, „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette, II,“ *Deutsche Schachzeitung. Organ für das Gesammte Schachleben*, Izv. 29, št. 9, pp. 257-267, 1874.
- [4] T. B. Sprague, „On the eight queens problem,“ *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, Izv. 17, pp. 43-68, 1899.
- [5] J. Bell in B. Stevens, „A survey of known results and research areas for n-queens,“ *Discrete Mathematics*, Izv. 309, št. 1, pp. 1-31, 2009.
- [6] C. Berge, „Graphes et hypergraphes,“ Izv. 37, 1970.
- [7] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics, Fifth Edition*, Pearson Education Inc., 2010.
- [8] N. Šere, *Neodvisnostno število grafa*, Magistrsko delo, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, 2020.
- [9] Wikipedia, „Graph theory,“ Wikiedia, [Elektronski]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory. [Poskus dostopa 31. Januar 2021].
- [10] S. C. Carlson, „Graph theory,“ Britannica, [Elektronski]. Available: <https://www.britannica.com/topic/graph-theory>. [Poskus dostopa 31. Januar 2021].
- [11] I. S. Costa, „Queen's graph,“ 16 April 2019. [Elektronski]. Available: <https://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s82vortrag/serodio.pdf>. [Poskus dostopa 2. Februar 2021].
- [12] W. Staton, „A short proof of Turan's theorem,“ *The American Mathematical Monthly*, Izv. 106, št. 3, pp. 257-258, 1999.

- [13] V. Neale, „An introduction to modular arithmetic,“ Nrich, Februar 2011. [Elektronski]. Available: <https://nrich.maths.org/4350>. [Poskus dostopa 3. Februar 2021].
- [14] Wikipedia, „Modular arithmetic,“ Wikipedia, [Elektronski]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Modular_arithmetic. [Poskus dostopa 3. Februar 2021].
- [15] P. Cull in R. Pandey, „Isomorphism and the N-Queens problem,“ *ACM SIGCSE Bulletin*, Izv. 26, št. 3, 1994.
- [16] I. Rivin, I. Vardi in P. Zimmerman, „The n-Queens Problem,“ *The American Mathematical Monthly*, Izv. 101, št. 7, pp. 629-639, 1994.
- [17] L. W. Beineke, I. Broere in M. A. Henning, „Queens graphs,“ *Discrete Mathematics*, Izv. 206, št. 1-3, pp. 63-75, 1999.
- [18] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi in P. J. Slater, *Fundamentals of dominations in graphs*, New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1998.
- [19] G. H. Fricke, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, C. K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin in W. D. Weakley, „Combinatorial problems on chessboards: A brief survey,“ v *Graph theory, combinatorics, and algorithms*, Izv. 1, Wiley, New York, Wiley-Intersci. Publ., 1995, pp. 507-528.

8. VIRI SLIK

Slika 2. The Toroidal Chessboard 2011, digitalna slika, Tex, uporabljeno 28. 1. 2021, <<https://tex.stackexchange.com/questions/27597/drawing-checkered-torus-doughnut/27602#27602>>

Slika 7. Queen graph for $2 \times n$ chessboard, digitalna slika, Wolfram MathWorld, uporabljeno 29.1. 2021, <<https://mathworld.wolfram.com/QueenGraph.html>>

Slika 13. 8 queen chess problem, digitalna slika, GitHub, uporabljeno, 19.1. 2021, <<https://github.com/VanHakobyan/8-queen-chess-problem>>

*Vse druge slike sem sam naredil v programu Excel ali v programu Geogebra