

# Oblika in parametri verižnice

Simon Bukovšek

Mentorica: Barbara Kušar

27. marec 2021

## Povzetek

Verižnica je krivulja, ki jo ustvari viseča vrvi, pritrjena na obeh koncih. Hkrati je to tudi graf funkcije hiperbolični kosinus, ki je definirana kot  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . To se lahko dokaže z upoštevanjem ravnovesja sil. Ko vrv miruje, mora biti vsota sil na vsak del vrvi enaka nič. Hiperbolični kosinus ima podobno kot kvadratna funkcija tri parametre, ki lahko opišejo vsako neizrojeno pozicijo viseče vrvi: koordinati minimuma in faktor raztega. Če pa določimo dve poljubni točki, ki naj ležita na krivulji, in dolžino krivulje med točkama, s tem enolično opišemo obliko vrvi, ki se lahko pojavi v naravi. Odgovor na vprašanje, kakšni so trije parametri verižnice (oba premika in razteg), če imamo podani dve robni točki vrvi in njeno dolžino, je precej kompleksen. Pot do odgovora pelje mimo obširnega obračanja hiperboličnih in inverznih hiperboličnih funkcij ter pripelje do transcendentne enačbe  $\sinh(x) = kx$ . Ker se enačbe ne da analitično rešiti, lahko vpeljemo inverzno funkcijo funkcije  $\frac{\sinh(x)}{x}$ . Ta se da aproksimirati z inverzom prvih štirih členov Taylorjevega razvoja prvotne funkcije. Če primerjamo sliko prave vrvi z grafom verižnice z istimi podatki in uporabo zgoraj omenjene aproksimacije, je prileganje je skoraj popolno.

Ključne besede: verižnica, diferencialna enačba, hiperbolični kosinus, hiperbolične funkcije, inverzne hiperbolične funkcije, Taylorjeva vrsta.

## Abstract

The catenary is a curve that a hanging rope attached at both ends forms. It is also a graph of the hyperbolic cosine, defined as  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . This can be proven by considering force equilibrium. Since the rope is hanging still, the sum of the forces acting on any part of the rope should be zero. Similarly to quadratic function, hyperbolic cosine has three parameters that can describe any non-degenerate position of a hanging rope: horizontal and vertical translation and stretch or compression. If we specify the position of the vertex of the curve, there is still one free parameter that describes how stretched the curve is. If we specify two random points that should lie on the curve and the length of the curve between them, it uniquely describes one possible shape of the hanging rope. The question what the three parameters of the catenary are if we know the coordinates of both endpoints and the length of the rope gives a rather complex answer. It contains a great deal of operating with hyperbolic and inverse hyperbolic functions and ultimately comes to the problem of solving the transcendental equation  $\sinh(x) = kx$ . Since the equation cannot be solved analytically, we can introduce a new function that is defined as the inverse of  $\frac{\sinh(x)}{x}$ . It can be approximated using the inverse of the first four terms of the Taylor expansion of the original function. Comparing the picture of a real rope and the graph of the catenary with the same parameters using the above-mentioned approximation reveals almost perfect fit.

Key words: catenary, differential equation, hyperbolic cosine, hyperbolic functions, inverse hyperbolic functions, Taylor series.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Oblika verižnice</b>	<b>7</b>
2.1	Ravnovesje sil . . . . .	8
2.2	Reševanje diferencialne enačbe . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Hiperbolične funkcije</b>	<b>12</b>
3.1	Definicije . . . . .	12
3.2	Hiperbolične zveze . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Določanje parametrov</b>	<b>15</b>
4.1	Najnižja točka . . . . .	15
4.2	Dana dolžina in koordinate končnih točk . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Inverz funkcije <math>\frac{\sinh(x)}{x}</math></b>	<b>18</b>
5.1	Priprava . . . . .	18
5.2	Lastnosti funkcije $\frac{\sinh(x)}{x}$ . . . . .	19
5.3	Uvedba funkcije $S(x)$ . . . . .	21
5.4	Aproksimacija funkcije $S(x)$ . . . . .	21
5.5	Robni primeri . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Ali enačbe delujejo v praksi?</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Zaključek</b>	<b>28</b>
	<b>Literatura</b>	<b>29</b>

## Slike

1	Sile, ki delujejo na vrv . . . . .	8
2	Verižnica . . . . .	11
3	Hiperbolične funkcije . . . . .	12
4	Graf funkcije $\frac{\sinh(x)}{x}$ . . . . .	19
5	Inverz funkcije $\frac{\sinh(x)}{x}$ . . . . .	20
6	Prikaz aproksimacij . . . . .	23
7	Primer natočne aproksimacije . . . . .	24
8	Izrojen primer verižnice . . . . .	26
9	Slika vrvi s koordinatnim sistemom . . . . .	27
10	Prileganje matematično ustvarjene funkcije s sliko viseče vrvi . . . . .	27

## Kazalo enačb

1	Horizontalno ravnotežje sil . . . . .	8
2	Notranja sila v vrvi . . . . .	9
3	Vertikalno ravnotežje sil . . . . .	9
4	Dolžina odseka $ds$ . . . . .	9
5	Razmerje med silo in kotom . . . . .	9
6	Diferencialna enačba . . . . .	10
7	Enačba verižnice . . . . .	11
8	Razlika kvadratov . . . . .	13
9	Odvod hiperboličnega sinusa . . . . .	13
10	Odvod hiperboličnega kosinusa . . . . .	13

11	Razlika hiperboličnih sinusov . . . . .	13
12	Razlika hiperboličnih kosinusov . . . . .	14
13	Hiperbolični kosinus area hiperboličnega tangensa . . . . .	14
14	Hiperbolični sinus area hiperboličnega tangensa . . . . .	15
15	Enačba verižnice z dano najnižjo točko . . . . .	16
16	Pogoj, da gre verižnica skozi točko $A$ . . . . .	16
17	Pogoj, da gre verižnica skozi točko $B$ . . . . .	16
18	Enačba, ki sledi iz dane dolžine. . . . .	17
19	Enačba, ki sledi iz danih koordinat . . . . .	17
20	Poenostavljena enačba 18 . . . . .	17
21	Poenostavljena enačba 19 . . . . .	17
22	Razmerje enačb 20 in 21 . . . . .	17
23	Obrnjena enačba 22 . . . . .	17
24	Transcendentna enačba v $a$ . . . . .	17
25	Enačba verižnice z danima končnima točkama . . . . .	18
26	Transcendentna enačba v $t$ . . . . .	19
27	Končna enačba verižnice . . . . .	21
28	Enačba grafa verižnice v limiti . . . . .	25

# 1 Uvod

Matematika je sredstvo za opisovanje narave. Običajno je narava sicer zelo zapletena in je zato taka tudi matematika, ki naravo opisuje; pa še tako je pogosto samo približek. Vseeno pa obstajajo primeri v naravi, ki so opisljivi z dokaj preprosto matematiko.

Enden takih primerov je tudi modeliranje oblike, ki jo oblikuje viseča vrv. Mnogo matematikov se je že vprašalo po tej obliki, ki je postala tako pomembna, da je dobila svoje ime: *verižnica*. Sam sem s tem vprašanjem šel še malo dlje in se vprašal ali je možno analitično ugotoviti obliko in pozicijo vrvi kot graf neke funkcije, če poznamo dolžino vrvi in koordinate obeh njenih koncev.

Ta problem sem si zastavil že nekaj let nazaj, saj se mi je matematično opisovanje narave vedno zdelo zanimivo. Žal pa takrat še nisem imel ustreznega znanja in zato nisem uspel rešiti problema. Zdaj imam več znanja, motivacije in sposobnosti dostopanja do različnih virov, zato se mi zdi primerna priložnost, da odgovorim na vprašanje, ki sem si si ga zastavil tri leta nazaj.

## 2 Oblika verižnice

Preden pa sploh začnemo raziskovati parametre verižnice, bo potrebno ugotoviti njeno splošno obliko. Če ni drugače omenjeno, to celotno poglavje temelji na (Svirin, 2020).

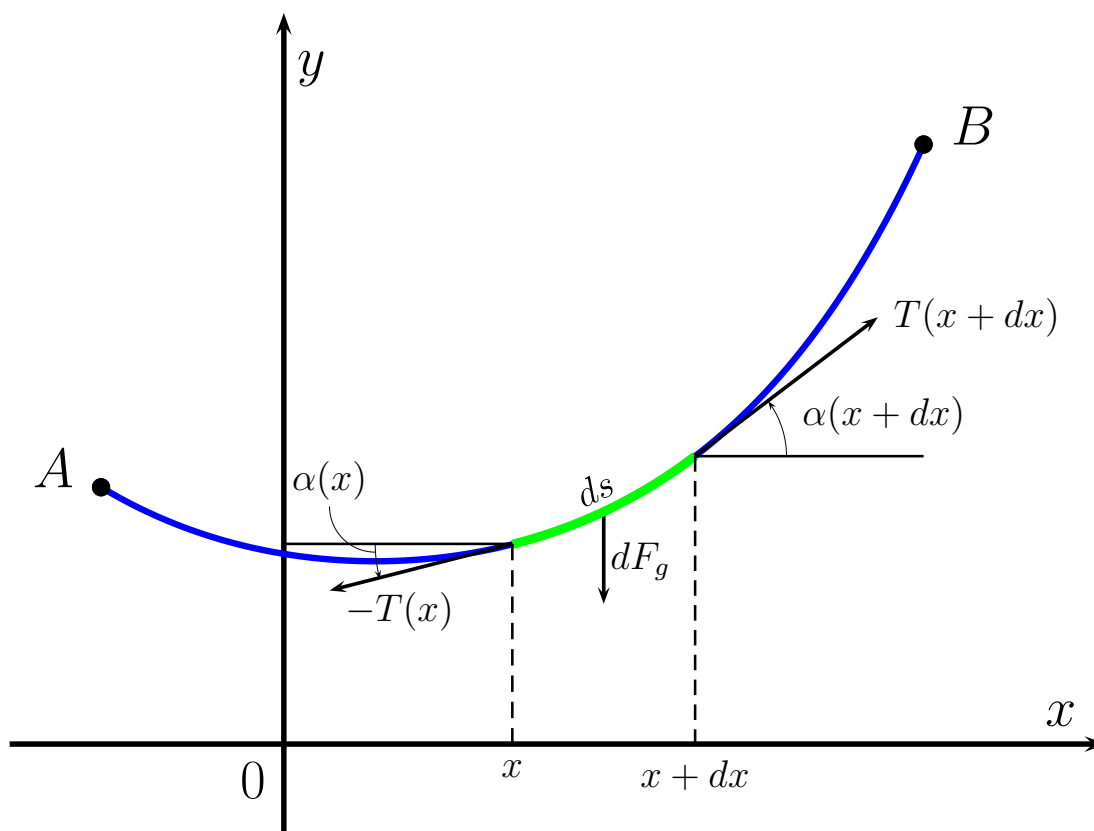
Najprej je potrebno narediti nekaj predpostavk. Da ohranimo problem relativno preprost, predpostavimo, da na celotno dolžino vrvi deluje enak gravitacijski pospešek  $g$ , ki kaže naravnost navzdol. Predpostavimo tudi, da ima vrv po celotni dolžini enako dolžinsko gostoto  $\mu$  t. j. maso na enoto dolžine, in da je upogljiva v vsaki točki. Zelo kratka veriga tako ne pride v upoštevanje, saj je gibljiva v samo majhnem številu točk. Več členov kot ima veriga, bolj točen bo matematični približek.

Da določimo splošno obliko verižnice lahko uberemo dve glavni poti. Ena je preko variacijskega računa, pri čemer minimiziramo potencialno energijo. Fizikalno je najbolj smiselno, da vrv v ravnovesju zavzame obliko z minimalno energijo. Variacijski račun je precej zapleten in napreden pristop, ki zahteva uporabo diferencialnega računa večih spremenljivk. Poleg tega se izkaže, da je potrebna tudi uporaba Lagrangevih multiplikatorjev (PlanetMath, 2013), saj je problem potrebno omejiti na vrv s točno določeno dolžino. Vse te metode iz matematične analize so zelo zanimive, ampak morda preveč zahtevne in težko razložljive za to raziskovalno nalogo. Drug možni pristop k problemu vključuje ravnovesje sil in reševanje ene diferencialne

enačbe ter je dosti bolj intuitiven, zato bom uporabil slednjo metodo.

## 2.1 Ravnovesje sil

Naj graf funkcije  $f(x)$  opisuje obliko verižnice. Vzemino infinitezimalno kratek odsek  $ds$  spremenljivke  $x$ . Ker delček vrvi  $ds$  nad tem odsekom skupaj s celotno vrvjo visi pri miru, se morajo vse sile na ta delček sešteti v nič. To velja posebej za horizontalne in vertikalne projekcije teh sil. Naj bo  $\alpha(x)$  kot med tangento na graf funkcije  $f(x)$  in  $x$ -osjo v točki  $x$  in naj bo  $T(x)$  sila v vrvi v smeri vrvi v točki  $x$ . Slika 1 prikazuje ravnovesje sil na odsek  $ds$ , ki bi moral biti zelo majhen, ampak je zaradi preglednosti predstavljen povečano.



Slika 1: Sile, ki delujejo na vrv

Ravnovesje horizontalnih komponent sil da enačbo:

$$-T(x) \cos(\alpha(x)) + T(x+dx) \cdot \cos(\alpha(x+dx)) = 0. \quad (1)$$



Iz enačbe 1 je razvidno, da je horizontalna komponenta notranje sile v vrvi skozi celotno vrv enaka, zato lahko zapišemo:  $T(x) \cos(\alpha(x)) = \text{konst.} = T_0$  oziroma

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos(\alpha(x))}. \quad (2)$$

Ravnovesje vertikalnih komponent sil da enačbo:

$$-T(x) \sin(\alpha(x)) + T(x+dx) \cdot \sin(\alpha(x+dx)) - dF_g = 0. \quad (3)$$

Tukaj je  $dF_g$  gravitacijska sila na odsek  $ds$ , ki se lahko zapiše kot  $dF_g = \mu \cdot g \cdot ds$ , kjer je  $g$  gravitacijski pospešek in  $\mu$  dolžinska gostota vrvi.

Z uporabo Pitagorovega izreka se lahko dolžina odseka  $ds$  izračuna kot:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (4)$$

Pri tem smo uporabili predpostavko, da je krivulja na odseku  $dx$  lokalno ravna.

Če nesemo  $dF_g$  na drugo stran enačbe 3 in obe strani delimo z  $dx$ , dobimo:

$$\frac{dF_g}{dx} = \frac{T(x+dx) \cdot \sin(\alpha(x+dx)) - T(x) \sin(\alpha(x))}{dx} = \frac{d(T(x) \sin(\alpha(x)))}{dx}.$$

Pri tem smo poenostavili izraz z upoštevanjem definicije odvoda.  $dF_g$  lahko zamenjamo z  $\mu \cdot g \cdot ds$ :

$$\mu g \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} (T(x) \sin(\alpha(x))). \quad (5)$$

Zdaj lahko nadomestimo  $ds$  z izrazom iz enačbe 4 in  $T(x)$  z izrazom iz enačbe 2, da dobimo:

$$\mu g \sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{d}{dx} \left( T_0 \frac{\sin(\alpha(x))}{\cos(\alpha(x))} \right) = \frac{d}{dx} (T_0 \tan(\alpha(x))) = \frac{d}{dx} (T_0 f'(x)) = T_0 f''(x).$$

Pri tem smo upoštevali, da je  $\tan(\alpha(x))$  enak odvodu  $f(x)$  v točki  $x$ . Iz tega sledi naslednja nehomogena nelinearna diferencialna enačba:

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{T_0}{\mu g} f''(x).$$

To enačbo pa lahko poenostavimo, če za  $f'(x)$  vstavimo novo funkcijo  $z(x)$ , in če faktor  $\frac{T_0}{\mu g}$  zapišemo kot  $a$ . Dobimo:

$$\sqrt{1 + z^2} = a \frac{dz}{dx}.$$

## 2.2 Reševanje diferencialne enačbe

Tako smo dobili separabilno diferencialno enačbo in zdaj jo lahko rešimo.

$$dx = a \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}. \quad (6)$$

Za to bomo morali izračunati sledeč integral:  $I = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ .

To lahko naredimo s pomočjo trigonometrične substitucije:  $z = \tan(u)$ ,  $dz = \sec^2(u)du$ .

*Opomba:*  $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

$$I = \int \frac{\sec^2(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} du = \int \frac{\sec^2(u)}{\sqrt{\sec^2(u)}} du = \int \sec(u) du$$

$$I = \int \sec(u) du = \int \sec(u) \frac{\sec(u) + \tan(u)}{\sec(u) + \tan(u)} du = \int \frac{\sec(u)\tan(u) + \sec^2(u)}{\sec(u) + \tan(u)} du$$

Uporabimo substitucijo  $v = \tan(u) + \sec(u)$ .

Sledi, da je  $dv = \sec(u)\tan(u)du + \sec^2(u)du$  in  $du = \frac{1}{\sec(u)\tan(u) + \sec^2(u)} dv$ .

$$I = \int \frac{1}{v} dv = \ln(v) + C_1$$

Sledi:  $\ln(v) = \ln(\tan(u) + \sec(u)) = \ln(\tan(\arctan(z)) + \sec(\arctan(z))) = \ln(z + \sqrt{1+z^2})$ .

Pri tem smo upoštevali, da je  $\tan(\arctan(z)) = z$  in

$$\sec(\arctan(z)) = \sqrt{1+\tan^2(\arctan(z))} = \sqrt{1+z^2}.$$

Končno lahko zaključimo, da je

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \ln(z + \sqrt{1+z^2}) + C_1$$

(Scherfgen, 2020).

V tem obrazcu se da prepoznati inverz hiperboličnega sinusa, ki lahko poenostavi nekaj naslednjih korakov, ampak ker še nismo prišli do hiperboličnih funkcij, bomo formulo izpeljal po daljši poti.

Sedaj lahko rešimo diferencialno enačbo 6.

$$\int dx = a \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

$$x + C_2 = a \ln(z + \sqrt{1+z^2}) + aC_1.$$

Če  $\frac{C_2}{a} - C_1$  nadomestimo s  $C$ , dobimo sledeč izraz:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{\left(\frac{x}{a} + C\right)}.$$

Da lahko izpostavimo  $z$ , označimo  $e^{\left(\frac{x}{a} + C\right)}$  s  $t$ .

$$z - t = \sqrt{1 + z^2}$$

$$z^2 - 2zt + t^2 = 1 + z^2$$

$$z = \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t - t^{-1}}{2} = \frac{e^{\left(\frac{x}{a} + C\right)} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C\right)}}{2}$$

Ker je  $z = f'(x)$ , velja, da je  $f(x) = \int z \, dx$ .

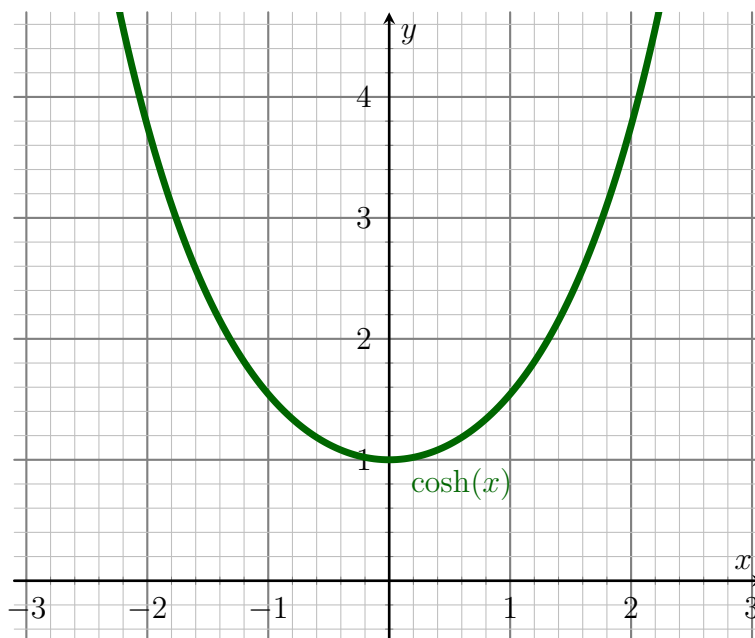
$$f(x) = \int z(x) \, dx = \int \frac{e^{\left(\frac{x}{a} + C\right)} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C\right)}}{2} \, dx = a \frac{e^{\left(\frac{x}{a} + C\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C\right)}}{2} + \lambda = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C\right) + \lambda$$

V zgornjem izračunu so  $c_1, c_2, a, C, \lambda \in \mathbb{R}$  integracijske konstante. Uvedli smo funkcijo imenovano hiperbolični kosinus. Več o bo povedano v naslednjem poglavju.

$$\boxed{f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C\right) + \lambda} \quad (7)$$

(Svirin, 2020)

Sliko verižnice s parametri  $a = 1$  in  $C = \lambda = 0$  prikazuje Slika 2.



Slika 2: Verižnica

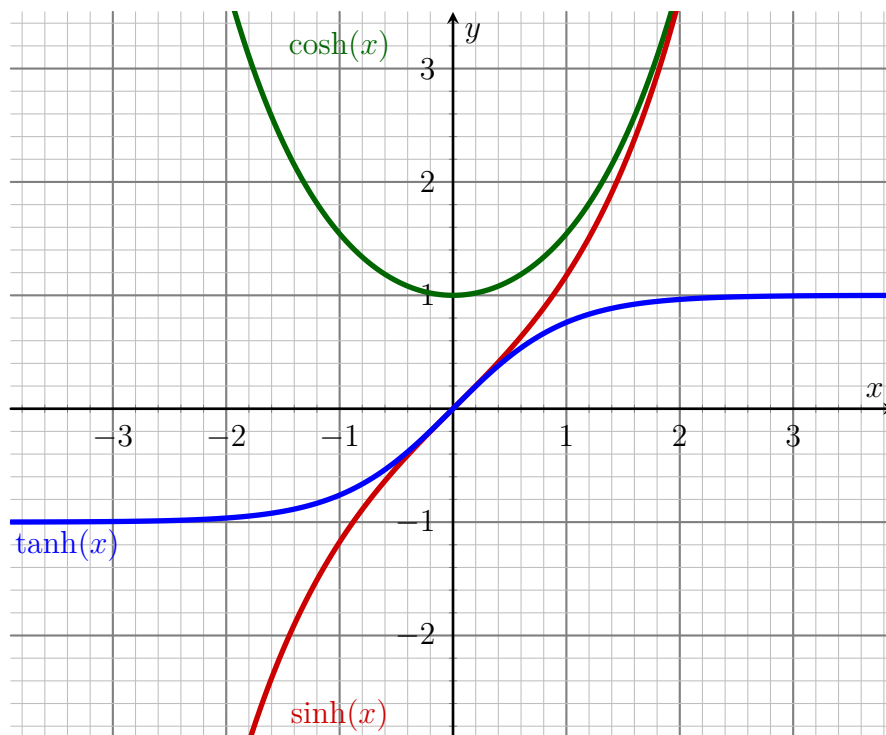
### 3 Hiperbolične funkcije

V nadaljnjem raziskovanju bom uporabil nekaj hiperboličnih funkcij in zvez med njimi. Da ne bi vaskič sproti razlagal in dokazoval zvez, jih bom skupaj predstavil v tem poglavju in se v nadaljevanju skliceval na te dokaze. Ti temeljijo na definicijah iz (Weisstein, 2020a; Weisstein, 2020b).

#### 3.1 Definicije

Hiperbolične funkcije so množica naslednjih funkcij:  $\sinh(x)$ ,  $\cosh(x)$  in  $\tanh(x)$ . Imenujejo se hiperbolični sinus, kosinus in tangens. Njihove grafe prikazuje Slika 3. Kot že imena nakazujejo, so zelo podobne navadnim trigonometričnim funkcijam – mnogo zvez med njimi je popolnoma ekvivalentnih zvezam med običajnimi trigonometričnimi funkcijami, pri ostalih pa se spremeni samo kakšna malenkost. Za razliko od običajnih so hiperbolične funkcije za realne vrednosti neperiodične. Definirane so na sledeč način:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



Slika 3: Hiperbolične funkcije

Inverzi hiperboličnih funkcij so  $\operatorname{arsinh}(x)$ ,  $\operatorname{arcosh}(x)$  in  $\operatorname{artanh}(x)$ . Imenujejo se area hiperbolični sinus, kosinus in tangens. Iz osnovnih hiperboličnih funkcij se lahko izrazijo kot:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}); \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); \operatorname{tanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

### 3.2 Hiperbolične zveze

V nadaljevanju bom uporabil naslednje zveze:

•

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1} \quad (8)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} - (-2) - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

•

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \frac{1 \cdot e^x - (-1) \cdot e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

•

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{1 \cdot e^x + (-1) \cdot e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

•

$$\boxed{\sinh(x) - \sinh(y) = 2 \cosh\left(\frac{x + y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x - y}{2}\right)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x) - \sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{2x+y-y}{2}} - e^{\frac{-2x+y-y}{2}} - e^{\frac{2y+x-x}{2}} + e^{\frac{-2y+x-x}{2}} \right) = \\
&= \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} e^{\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{\left(\frac{-x+y}{2}\right)} e^{\left(\frac{-x-y}{2}\right)} - e^{\left(\frac{y+x}{2}\right)} e^{\left(\frac{y-x}{2}\right)} + e^{\left(\frac{-y+x}{2}\right)} e^{\left(\frac{-y-x}{2}\right)}}{2} = \\
&= 2 \frac{\left( e^{\frac{x+y}{2}} + e^{\frac{-x-y}{2}} \right) \left( e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{y-x}{2}} \right)}{4} = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

•

$$\boxed{\cosh(x) - \cosh(y) = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\cosh(x) - \cosh(y) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{2x+y-y}{2}} + e^{\frac{-2x+y-y}{2}} - e^{\frac{2y+x-x}{2}} - e^{\frac{-2y+x-x}{2}} \right) = \\
&= \frac{e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)} e^{\left(\frac{x-y}{2}\right)} + e^{\left(\frac{-x+y}{2}\right)} e^{\left(\frac{-x-y}{2}\right)} - e^{\left(\frac{y+x}{2}\right)} e^{\left(\frac{y-x}{2}\right)} - e^{\left(\frac{-y+x}{2}\right)} e^{\left(\frac{-y-x}{2}\right)}}{2} = \\
&= 2 \frac{\left( e^{\frac{x+y}{2}} - e^{\frac{-x-y}{2}} \right) \left( e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{y-x}{2}} \right)}{4} = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

•

$$\boxed{\cosh(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\cosh(\operatorname{artanh}(x)) &= \frac{1}{2} \left( e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)} + e^{-\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \frac{1+x+1-x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

•

$$\sinh(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{x^{-2} - 1}} \quad (14)$$

$$\text{Opomba: } \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{če } x < 0; \\ 0, & \text{če } x = 0; \\ 1, & \text{če } x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sinh(\operatorname{artanh}(x)) &= \frac{1}{2} \left( e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)} - e^{-\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \frac{1+x - 1+x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{x^{-2} - 1}} \end{aligned}$$

*Opomba:* v zadnjih dveh primerih je potrebno paziti, kdaj so izrazi pod koreni pozitivni. Seveda pa je area hiperbolični tangens definiran samo za  $|x| < 1$ , torej so vsi izrazi pod koreni pozitivni in ni potrebno dodatno skrbeti.

## 4 Določanje parametrov

Celotno poglavje temelji na članku o parametrih verižnice (Emery, 2003).

### 4.1 Najnižja točka

Najprej bom določil parametre funkcije  $f(x) = \lambda + a \cosh\left(\frac{x}{a} + C\right)$ , če sta podani samo koordinati najnižje točke  $(x_0, y_0)$ . Najnižjo točko funkcije lahko najdemo kot stacionarno točko z enačenjem odvoda z nič. Z uporabo enačbe 10 dobimo sledeč rezultat:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda + a \cosh\left(\frac{x}{a} + C\right) \right) = a \frac{1}{a} \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right) = \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right).$$

Ta odvod mora biti v neki točki  $x_0$  enak 0, torej  $f'(x_0) = 0$ . Hiperbolični sinus je enak nič samo, ko je njegov argument enak nič. To pomeni, da mora veljati  $x_0 = \frac{x}{a} + C$ , iz česar sledi, da je  $C = -\frac{x_0}{a}$ .

Naslednji podatek, ki ga poznamo, je vrednost funkcije  $f(x)$  v točki  $x_0$  – to je  $f(x_0) = y_0$ .

$$\begin{aligned} y_0 &= \lambda + a \cosh\left(\frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{a}\right) = \lambda + a \cosh(0) = \lambda + a \\ \lambda &= y_0 - a \end{aligned}$$

Če vstavimo izraza za  $C$  in  $\lambda$  v prvotno enačbo, dobimo:

$$f(x) = y_0 - a + a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \quad (15)$$

Ostane na še en prost parameter, ki je lahko katerokoli pozitivno realno število. Zakaj samo pozitivno?

Vrv v naravi vedno visi na tak način, da tvori konveksno obliko. Funkcija  $\cosh(x)$  je konveksna na intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Ker je ta funkcija tudi soda, člen  $a$  v argumentu funkcije ne vpliva na konveksnost. Ampak člen  $a$  pred kosinusom pa ima vpliv na konveksnost. Če je  $a$  pozitiven, je graf funkcije 15 konveksen, če pa je  $a$  negativen, je graf konkaven. Torej, če gravitacija kaže navzdol, mora biti  $a$  pozitiven. (Emery, 2003)

## 4.2 Dana dolžina in koordinate končnih točk

Sedaj bomo poskusili najti parametre enačbe 15 izražene z dolžino vrvi in koordinatami obeh koncev vrvi. Definirajmo točki  $A(x_1, y_1)$  in  $B(x_2, y_2)$  kot krajišči vrvi in  $l$  dolžino vrvi. Pogoja, da gre vrv skozi obe točki  $A$  in  $B$ , sta:

$$y_1 = y_0 - a + a \cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) \quad (16)$$

in

$$y_2 = y_0 - a + a \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right). \quad (17)$$

Naslednji pogoj je, da je dolžina krivulje med  $x_1$  in  $x_2$  enaka  $l$ .

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je  $x_1 < x_2$ .

Dolžina krivulje  $f(x)$  med  $x_1$  in  $x_2$  se lahko izračuna z dodajanjem majhnih odsekov krivulje  $ds$  med  $x_1$  in  $x_2$ . Izraz za  $ds$  je izpeljan že v enačbi 4.

$$l = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Za enačbo 15 ta obrazec postane:

$$\begin{aligned} l &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right)\right)^2} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x - x_0}{a}\right)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) dx = a \sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili dve zvezi med hiperboličnimi funkcijami, najprej enačbo 10, potem



pa še enačbo 8. Če zdaj ocenimo integral za obe vrednosti in vse delimo z  $a$ , dobimo:

$$\frac{l}{a} = \sinh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right). \quad (18)$$

Če odštejemo enačbo 16 od enačbe 17 in delimo z  $a$ , dobimo:

$$\frac{y_2 - y_1}{a} = \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right). \quad (19)$$

Sedaj lahko enačbi 18 in 19 s pomočjo izrazov 11 in 12 nekoliko poenostavimo:

$$\frac{l}{a} = \sinh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) = 2 \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \cosh\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a}\right), \quad (20)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{a} = \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) = 2 \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \sinh\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a}\right). \quad (21)$$

Če delimo enačbo 21 z enačbo 20, lahko še dodatno poenostavimo izraz.

$$\frac{y_2 - y_1}{l} = \frac{\sinh\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a}\right)} = \tanh\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a}\right) \quad (22)$$

Ker je area hiperbolični tangens bijektivna funkcija na intervalu  $(-1, 1)$ , in ker je  $|y_2 - y_1|$  očitno manjše od  $l$ , sta zagotovo obe strani enačbe 22 na intervalu  $(-1, 1)$ , torej lahko obe strani enačbe vstavimo v funkcijo area hiperbolični tangens.

$$\operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right) = \operatorname{artanh}\left(\tanh\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a}\right)\right) = \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2a} \quad (23)$$

Enačbo 23 lahko spet nesemo nazaj v enačbo 20 in tako pridemo korak bliže izolaciji parametra  $a$ .

$$\frac{l}{a} = 2 \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \cosh\left(\operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right)$$

Z uporabo izraza 13 lahko to še nekoliko poenostavimo.

$$\begin{aligned} \frac{l}{a} &= 2 \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)^2}} \\ \sqrt{l^2 - (y_2 - y_1)^2} &= 2a \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

(Emery, 2003)

Tako nam je uspelo izraziti  $a$  z vsemi danimi podatki, ampak žal samo implicitno. Od tu naprej nisem znal eksplicitno izraziti parametra  $a$ . (Emery, 2003) predalga, da se rešitev

poišče numerično. Kolikor sem uspel raziskati, za to enačbo ne obstaja analitična rešitev.

Seveda nas taka ovira ne sme ustaviti. Vsakič ko kdo naleti na nerešljivo enačbo, si lahko samo izmisli posebno funkcijo, ki je rešitev te enačbe. To je nj bi bila samo zadnja rešitev, če vse ostalo odpove. To sicer ne pomeni, da take posebne funkcije ne obstajajo. Predvsem v matematični analizi, kjer se veliko uporabnih rezultatov ne da izraziti z običajnimi funkcijami, se pogosto zatekajo k imenovanju posebnih funkcij. Tako imamo Lambertovo  $W$  funkcijo, ki je inverz funkcije  $xe^x$ , in Gama funkcijo, ki pomaga pri razširitvi fakultete na realna in kompleksna števila. Kakorkoli, namesto da bi definirali funkcijo, ki bi bila preprosto rešitev enačbe 24, sem našel nekoliko bolj elegantno pot.

Če si za trenutek zamislimo, da lahko določimo  $a$ , bi bilo preostala dva parametra zelo preprosto izraziti iz enačb 19 in 14:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{x_1 + x_2}{2} - a \operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right), \\y_0 &= y_1 + a - a \cosh\left(\frac{x - 1 - x_0}{l}\right).\end{aligned}$$

Če vstavimo izraza za oba parametra v enačbo 15, dobimo naslednja izraza.

$$\begin{aligned}f(x) &= x_0 - a + a \cosh\left(\frac{2x - x_1 - x_2}{2a} + \operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right) \\f(x) &= y_1 + a \left(\cosh\left(\frac{2x - x_1 - x_2}{2a} + \operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right) - \cosh\left(\frac{x_1 - x_2}{2a} + \operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

To lahko zapišemo nekoliko bolj strnjeno, ampak manj razumljivo, z uporabo izraza 12:

$$f(x) = y_1 + 2a \sinh\left(\frac{x - x_0 - 2}{2a} + \operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right) \sinh\left(\frac{x - x_1}{2a}\right). \quad (25)$$

## 5 Inverz funkcije $\frac{\sinh(x)}{x}$

V tem poglavju bom predstavil, kako se lahko na nekoliko elegantenjši način reši enačba 24.

### 5.1 Priprava

Najprej delimo obe strani enačbe 24 z  $x_2 - x_1$  (poseben primer, kjer je  $x_1 = x_2$  bom posebej raziskal kasneje) in označimo izraz  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  s  $k$ , saj je to ravno naklon premice med točkama  $A$  in  $B$ .

$$\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = \sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - k^2} = \frac{2a}{x_2 - x_1} \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right)$$

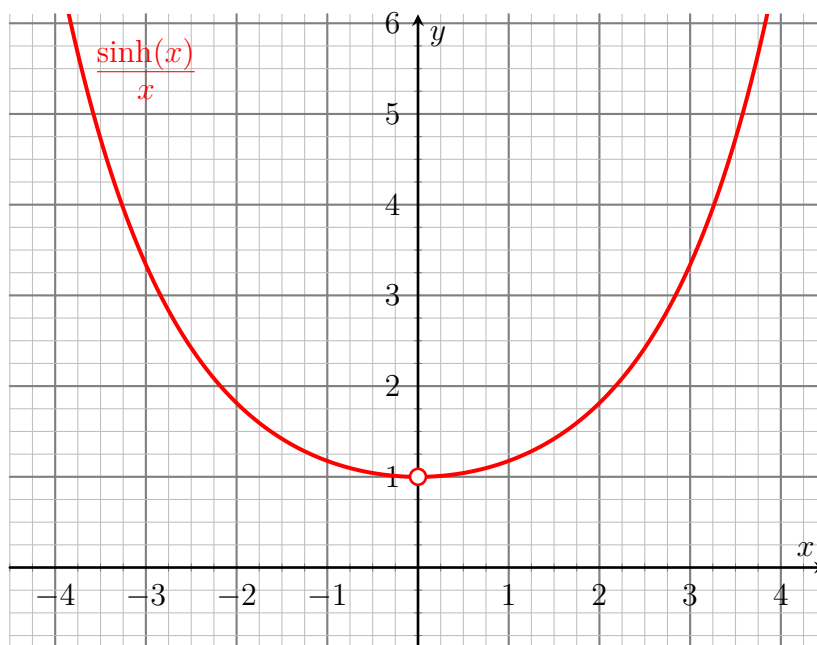
Označimo zdaj izraz  $\frac{x_2 - x_1}{2a}$  s  $t$ :

$$\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - k^2} = \frac{\sinh(t)}{t}. \quad (26)$$

Definirajmo funkcijo  $h(t) = \frac{\sinh(t)}{t}$ . Če želimo rešiti enačbo 26, moramo najti tak  $t$ , da bo veljalo  $h(t) = \sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - k^2}$ . Če bi obstajal inverz funkcije  $h(t)$ , bi lahko izolirali  $t$  in posledično  $a$ .

## 5.2 Lastnosti funkcije $\frac{\sinh(x)}{x}$

Prva ideja pri iskanju inverza je razmisliti, kakšne so lastnosti grafa funkcije  $\frac{\sinh(x)}{x}$ . Graf kaže Slika 4.



Slika 4: Graf funkcije  $\frac{\sinh(x)}{x}$

Na prvi pogled je podoben hiperboličnemu kosinusu. Definijsko območje je  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , zaloga vrednosti pa  $(1, \infty)$ . Funkcija pri  $x = 0$  ni definirana, limita v tej točki pa je:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sinh(x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x)}{1} = 1,$$

kar je tudi razvidno s Slike 4.

Pri računanju limite smo uporabili l'Hôpitalovo pravilo. To pravilo pravi, da je limita kvocienta dveh funkcij, ki sta v limiti enaki 0,  $-\infty$  ali  $\infty$ , enaka limiti kvocienta odvodov teh dveh funkcij:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

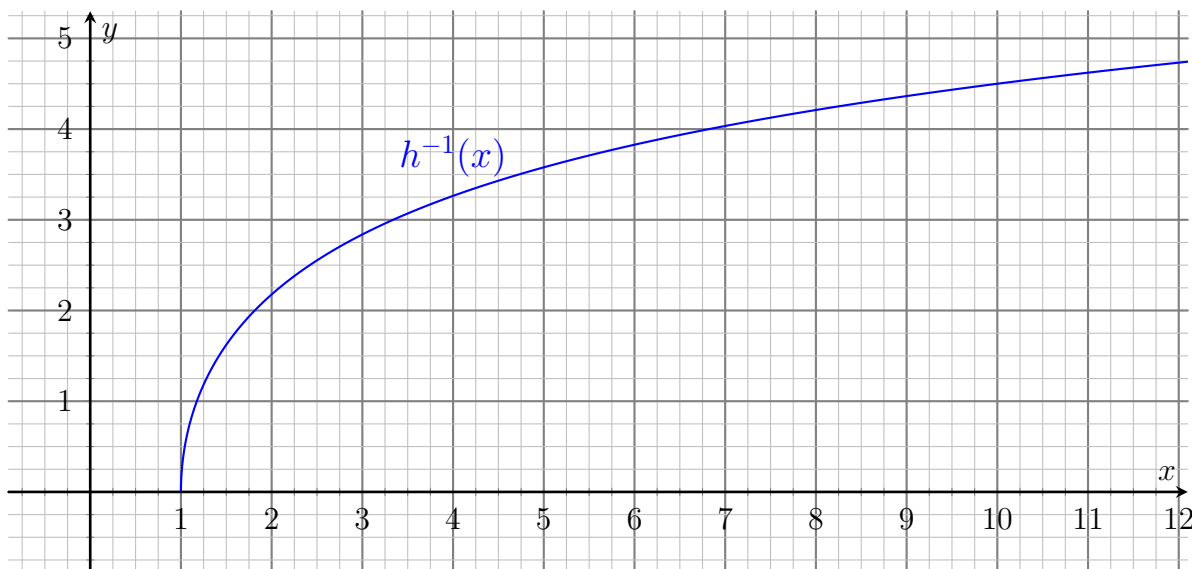
(Fannon in sod., 2020).

Če inverz funkcije obstaja, mora biti vsaj injektivna. Ker pa želimo, da je inverz tudi zvezen, mora biti funkcija tudi surjektivna in posledično bijektivna. Ker smo predpostavili, da  $x_1 < x_2$  in  $a < 0$ , morajo biti zaradi enačbe 24 vrednosti, ki jih inverz zasede, pozitivne. To pomeni, da lahko definicijsko območje funkcije  $h(t)$  skrčimo na interval  $\mathbb{R}^+$ . Naslednji pogoj za bijektivnost je monotonost. Izkaže se, da je funkcija  $\frac{\sinh(x)}{x}$  strogo naraščajoča na intervalu  $\mathbb{R}^+$ .

*Dokaz:* Odvod  $\frac{\sinh(x)}{x}$  je  $\frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{x^2}$ .  $x^2$  v imenovalcu je vedno pozitiven za  $x \in \mathbb{R}^+$ . Torej nas zanima predznak vrednosti izraza  $x \cosh(x) - \sinh(x)$ . Označimo ta izraz z  $m$ . Če ga nekoliko preoblikujemo dobimo:

$$x = \tanh(x) + \frac{m}{\cosh(x)}$$

Vemo, da je na intervalu  $(0, \infty)$   $\tanh(x)$  vedno manjši od  $x$  in  $\cosh(x)$  je vedno pozitiven, zato mora biti tudi  $m$  na tem intervalu pozitiven. To pa pomeni, da je naklon vedno večji od 0, torej je funkcija  $h(x)$  res monotona in torej bijektivna. Sedaj so izpolnjeni vsi kriteriji, da inverz funkcije  $h(x)$  lahko obstaja. Graf inverza, ki ga dobimo z zrcaljenjem grafa  $h(x)$  čez simetralo lihih kvadrantov, je prikazan na Sliki 5.



Slika 5: Inverz funkcije  $\frac{\sinh(x)}{x}$

### 5.3 Uvedba funkcije $S(x)$

Naj bo torej funkcija  $S(x)$  definirana kot inverz funkcije  $h(x) = \frac{\sinh(x)}{x}$ . Glede na to da še nikjer v literaturi nisem našel na podobno funkcijo, sem predpostavil, da nima nobenega posebnega zapisa, zato ne vidim nobenih ovir, da ne obdržim takega zapisa. Najprej bom izrazil  $a$  s funkcijo  $S(x)$ , potem pa bom to funkcijo podrobneje raziskal.

Če sedaj vstavimo obe strani enačbe 26 v  $S$ , dobimo:

$$S\left(\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - k^2}\right) = S\left(\frac{\sinh(t)}{t}\right) = t = \frac{x_2 - x_1}{2a}.$$

*Opomba:* zaloga vrednosti funkcije  $h(x)$  je  $(1, \infty)$ , torej je definicijsko območje  $S(x)$  prav tako  $(1, \infty)$ . Torej moramo paziti, da morda leva stran enačbe 26 ni manjša od 1. Vemo, da dolžina vrvi ni manjša od najmanjše razdalje med točkama  $A$  in  $B$ .

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &< l^2 \\ 1 &< \frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 \\ 1 &< \sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - k^2} \end{aligned}$$

Poseben primer ko tu velja enakost bomo predelali kasneje. Ta neenakost pomeni, da prejšnji korak lahko storimo. Sedaj lahko izrazimo  $a$ :

$$a = \frac{x_2 - x_1}{2 \cdot S\left(\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}\right)}.$$

Ta izraz lahko nesemo v enačbo 25. Da pa ne bo popolnoma nepregledna, bomo

$S\left(\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}\right)$  na kratko označili s  $S_*$ .

$$f(x) = y_1 + \frac{x_2 - x_1}{S_*} \sinh\left(S_* \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} + \operatorname{artanh}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right) \sinh\left(S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \quad (27)$$

In to je končni rezultat, enačba viseče vrvi, kjer so parametri samo dolžina vrvi in koordinate končnih točk.

### 5.4 Aproksimacija funkcije $S(x)$

Seveda pa ni nalažje povedati računalniku, naj izračuna, pri kateri vrednosti bo imela funkcija  $\frac{\sinh(x)}{x}$  vrednost 10, na primer. Zato bom sedaj uporabil metodo, da bom funkcijo  $S(x)$

aproksimiral z običajnimi funkcijami. Spet obstajata vsaj dve glavni metodi, kako se lotiti problema. Prvi način je uporaba Lagrange-Brümannove formule za Taylorjev razvoj inverza. Ta zahteva reševanje zelo zahtevnih limit (Dobrushkin, 2020), poleg tega pa bi morali še celo funkcijo premakniti in imeti opravka s še nekaj nevšečnostmi. Druga metoda je najti inverze prvih nekaj členov Taylorjevega (oz. Maclaurinovega) razvoja prvotne funkcije. Žal ta metoda verjetno nikoli ne more dati popolne aproksimacije, saj se že pri četrtem členu obrazec za inverz polinoma zelo zaplete, pri šestem členu pa morda sploh ne obstaja več v obliki korenskih funkcij. Dokazano je namreč bilo, da polinomi pete stopnje v splošnem nimajo analitičnih rešitev za njihove ničle. Vseeno sem se odočil za drugo pot, saj je dosti bolj enostavna in da presenetljivo dobre rezultate.

Torej najprej poiščimo Taylorjev razvoj funkcije  $\frac{\sinh(x)}{x}$ . Vemo, da je razvoj funkcije  $e^x$  sledeč:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

To je vse kar potrebujemo za razvoj  $h(x)$ :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right).$$

Za vse sode  $n$  se zgornji izraz odšteje in je enak 0, za vse lihe  $n$  (torej števila oblike  $n = 2k+1$ ) pa je ostane sledeče:

$$\frac{1}{2x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{5040} + \dots$$

Naj bo  $S_n(x)$  inverz vsote prvih  $n$  členov zaporedja. Tukaj lahko izkoristimo dejstvo, da vsak  $x$  nastopa v sodi potenci. Ker pričakujemo samo pozitivne rezultate, ni potrebno posvečati preveč pozornosti predznakom.

$S_2(x)$ :

$$x = 1 + \frac{y^2}{6}$$

$$y^2 = 6x - 6$$

$$S_2(x) = \sqrt{6x - 6}$$

$S_3(x)$ :

$$x = 1 + \frac{y^2}{6} + \frac{(y^2)^2}{120}$$

$$(y^2)^2 + 20y^2 + 120(1 - x) = 0$$

$$y^2 = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 480 + 480x}}{2} = -10 \pm \sqrt{-20 + 120x}$$

$$S_3(x) = \sqrt{-10 + \sqrt{-20 + 120x}}$$

Vzeli smo pozitivni predznak, saj mora biti  $y^2$  pozitiven.

Naslednji korak je že težje izračunati na roko, zato bom uporabil računalniški program (Wolfram Alpha, 2020), ki bo poiskal naslednji inverz. Prve štiri člene lahko poenostavimo, saj vsak  $x$  nastopa v sodi potenci. Lahko rečemo, da iščemo inverz funkcije  $g(t) = 1 + \frac{t}{6} + \frac{t^2}{120} + \frac{t^3}{5040}$ , kjer je  $t = x^2$ . Rezultat je:

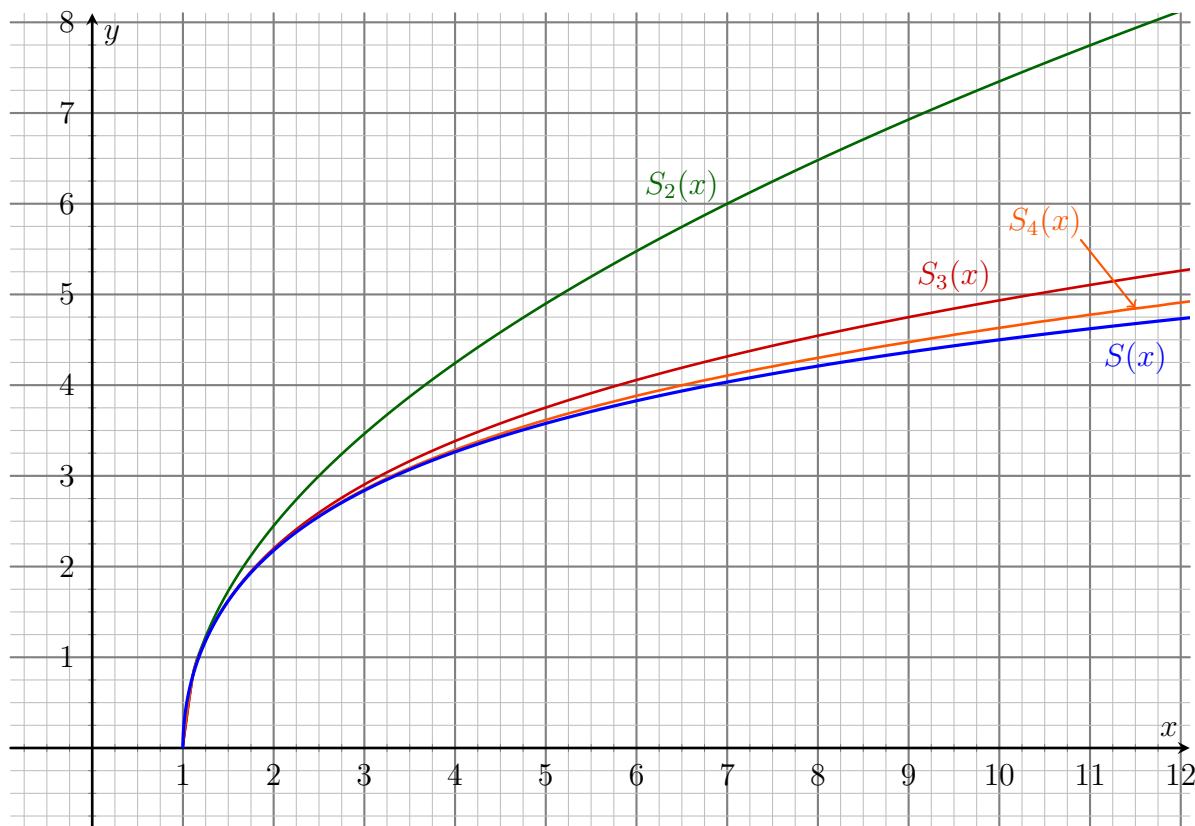
$$S_4^2(x) = g^{-1}(x) = -2\sqrt[3]{7p(x)} + 6\sqrt[3]{\frac{49}{p(x)}} - 14,$$

pri čemer je  $p(x) = \sqrt{5}\sqrt{405x^2 + 198x + 62} - 45x - 11$ .

$$S_4(x) = \sqrt{-2\sqrt[3]{7(\sqrt{5}\sqrt{405x^2 + 198x + 62} - 45x - 11)} + 6\sqrt[3]{\frac{49}{\sqrt{5}\sqrt{405x^2 + 198x + 62} - 45x - 11}} - 14}$$

Jasno je, da je izraz za  $S_4(x)$  zelo zapleten, ampak ga za razliko od prejšnje definicije za  $S(x)$  razumejo skoraj vsi kalkulatorji.

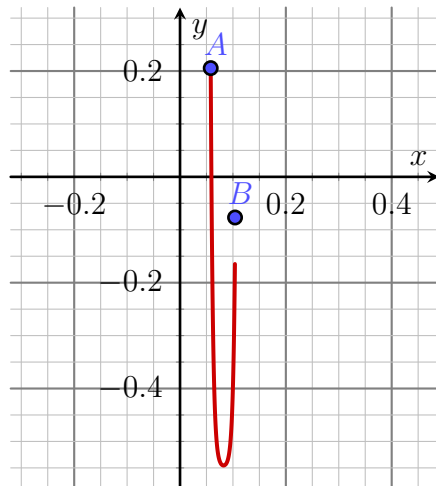
Vizualni prikazi aproksimacij so podani na Sliki 6.



Slika 6: Prikaz aproksimacij

Ker je  $S_n(x)$  inverz Taylorjevega razvoja okoli  $x = 0$ , so ti približki najbolj natančni v

točki  $x = 1$  in izgublja jo na natančnosti, ko se  $x$  povečuje. Potrebno se je zavedati, kdaj aproksimacija deluje in kdaj ne. V mojem primeru se natančnost izgubi, ko se argument funkcije  $S_n(x)$  večja, to pa je, ko  $l \ll y_2 - y_1$  ali pa ko  $x_1 - x_2 \ll 1$ . Primer netočne aproksimacije prikazuje Slika 7.



Slika 7: Primer netočne aproksimacije

## 5.5 Robni primeri

Do zdaj sem se široko izogibal primera, ko je  $\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = 1$ . Funkcija seveda v tisti točki ni definirana, ampak kaj se zgodi, če se izraz zelo približa 1, kaj se zgodi v limiti?

Vzemimo enačbo 27 in si jo predstavljajmo kot funkcijo dveh spremenljivk,  $S_*$  in  $x$ . Zanima nas torej, kakšno funkcijo od  $x$  dobimo, če vzamemo  $f(x, S_*)$  in naredimo  $S_*$  infinitezimalno majhga. To lahko izračunamo z limito.

$$\begin{aligned} \lim_{S_* \rightarrow 0} f(x, S_*) &= \lim_{S_* \rightarrow 0} \left( y_1 + \frac{x_2 - x_1}{S_*} \sinh \left( S_* \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} + \operatorname{artanh} \left( \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right) \sinh \left( S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right) \\ &= y_1 + \lim_{S_* \rightarrow 0} \left( \frac{x_2 - x_1}{S_*} \sinh \left( S_* \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} + \operatorname{artanh} \left( \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right) \sinh \left( S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right) = \\ &= y_1 + (x_2 - x_1) \sinh \left( \operatorname{artanh} \left( \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right) \lim_{S_* \rightarrow 0} \frac{\sinh \left( S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)}{S_*} = \\ &= y_1 + \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{sign} \left( \frac{y_2 - y_1}{l} \right)}{\sqrt{\frac{l^2}{(y_2 - y_1)^2} - 1}} \cdot \lim_{S_* \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial S_*} \sinh \left( S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)}{\frac{\partial}{\partial S_*} S_*}. \end{aligned}$$



Pri tem smo uporabili hiperbolično enakost iz enačbe 14 in l'Hôpitalovo pravilo.

*Opomba:* koren v imenovalcu v zadnjem koraku je definiran samo za  $l > (y_2 - y_1)$ . K sreči to zagotovo drži, saj vrv ne more biti krajša kot vertikalna razlika.

*Opomba:* ker smo upoštevali, da je funkcija v dveh spremenljivkah, je potrebna uporaba parcialnih odvodov. Ko odvajamo samo po eni spremenljivki, delujejo vse ostale spremenljivke kot konstante.

Ker je  $S_* = 0$ , je  $\sqrt{\frac{l^2}{(x_2 - x_1)^2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = 1$  in  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$ .

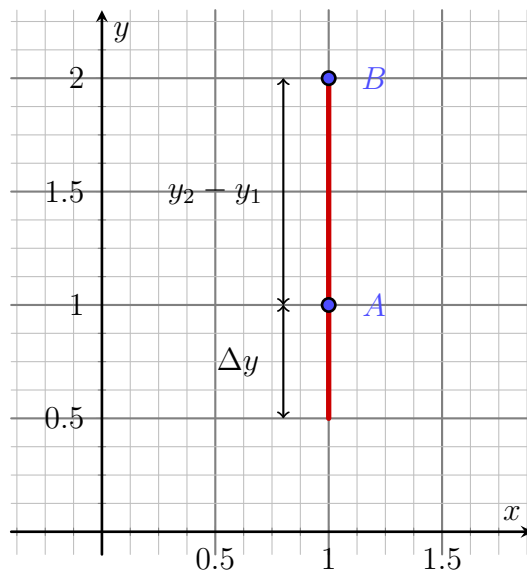
$$\begin{aligned}
& y_1 + \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{sign}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)}{\sqrt{\frac{l^2}{(y_2 - y_1)^2} - 1}} \cdot \lim_{S_* \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial S_*} \sinh\left(S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}{\frac{\partial}{\partial S_*} S_*} = \\
& = y_1 + \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{sign}(y_2 - y_1)}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(y_2 - y_1)^2} - 1}} \cdot \lim_{S_* \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cosh\left(S_* \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}{1} = \\
& = y_1 + \frac{(x_1 - x_2) \cdot \operatorname{sign}(y_2 - y_1)}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{(y_2 - y_1)^2}}} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = y_1 + \frac{\operatorname{sign}(y_2 - y_1) |y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \\
& = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \\
& \lim_{S_* \rightarrow 0} f(x, S_*) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \tag{28}
\end{aligned}$$

*Opomba:* ker je  $l$  pozitiven, je  $\operatorname{sign}\left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right) = \operatorname{sign}(y_2 - y_1)$ . Ker smo predpostavili, da velja  $x_1 < x_2$ , velja tudi  $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1$ .

Enačba 28 predstavlja enačbo premice med točkama  $A$  in  $B$ ; točno to, kar je pričakovati, če je dolžina vrvi ravno najkrajša možna razdalja med točkama. S tem smo tudi na nek način dokazali, da je premica (oz. daljica) res najkrajša možna pot med dvema točkama v Evklidski ravnini.

Ostala sta še dva primera. Identiteta  $\sinh(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$  ni definirana za  $x = 0$ . V tem primeru velja  $\sinh(\operatorname{artanh}(0)) = \sinh(0) = 0$  in  $\lim_{S_* \rightarrow 0} f(x, S_*) = y_1 = y_2$ .

Zadnji robni primer se zgodi, ko je  $x_1 = x_2$ . V tem primeru so enačbe nesmiselne že od samega začetka, zato je primer lažje rešiti z opazovanjem.



Slika 8: Izrojen primer verižnice

Ker velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \infty$ , velja, da je  $a = 0$ . Očitno je  $x_0 = x_1 = x_2$ ,  $y_0$  pa se lahko določi z malo razmisleka. Dolžina vrvi je sestavljena iz dela, ki je med točkama  $A$  in  $B$  (ki sta ena nad drugo) in dela, ki visi pod obema točkama (Slika 8). Za ta poseben primer lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da  $y_2 > y_1$ . Če označimo z  $\Delta y$  razdaljo med najnižjo točko in točko  $A$ , velja sledeče:

$$l = y_2 - y_1 + 2\Delta y,$$

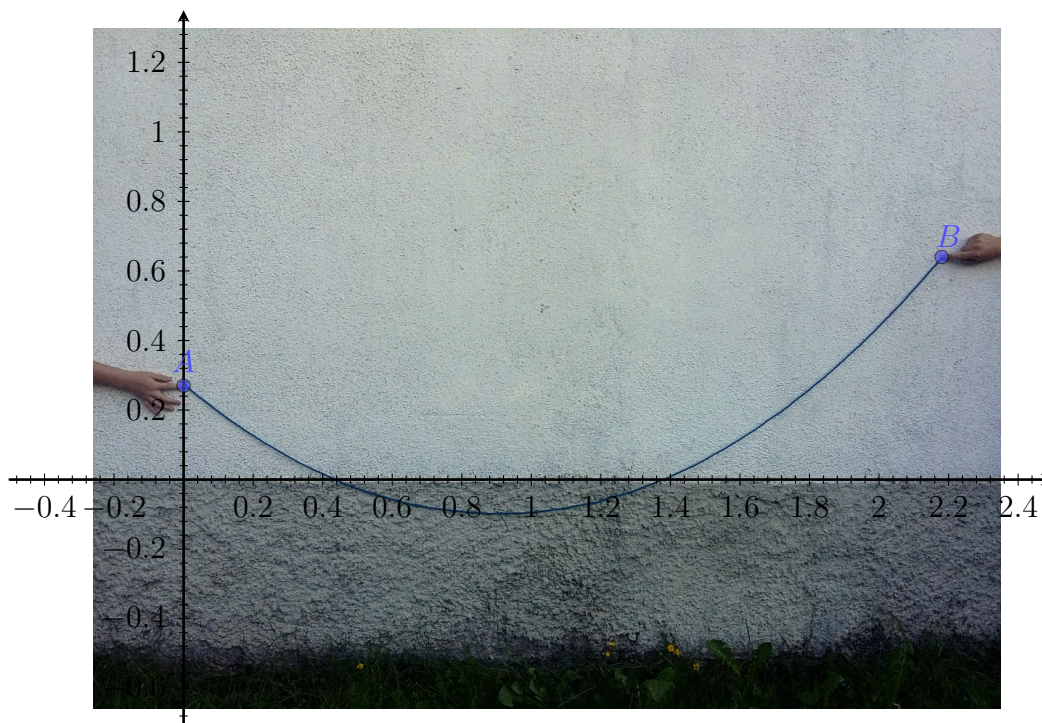
$$\Delta y = \frac{t + y_1 - y_2}{2},$$

$$y_0 = y_2 - \Delta y = \frac{y_1 + y_2 - l}{2}.$$

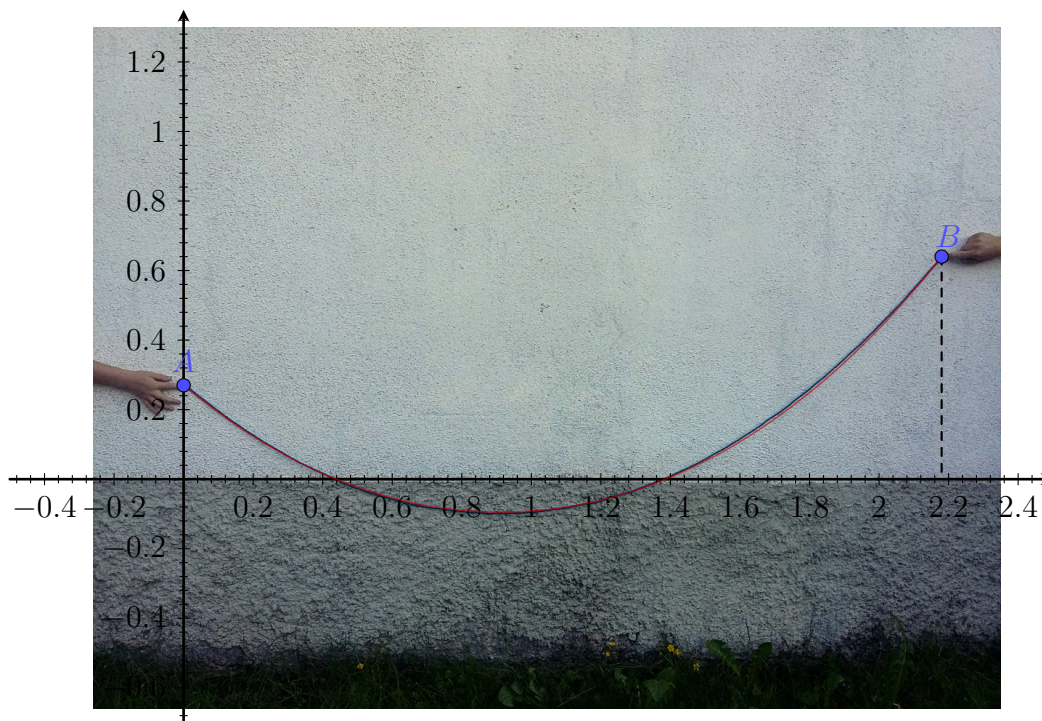
Izkaže se, da ni pomembno, katera točka je nižje.

## 6 Ali enačbe delujejo v praksi?

Da bi preveril, če zgoraj predstavljene metode delujejo v praksi, sem vzel vrv dolgo 2,52 metra in jo obesil, da je prosto visela v ravnini pravokotni na tla. Pripel sem jo na dve točki na tej ravnini s koordinatami  $(0, 0.27)$  in  $(2.18, 0.64)$  (vse enote so v metrih). Za  $x$ -os sem izbral spremembo v barvi fasade. Sliko viseče vrvi sem prilepil v ozadje orodja za izdelovanje grafov in čez narisal graf z takimi parametri, kot jih je imela vrv. Za aproksimacijo sem uporabil funkcijo  $S_4(x)$ . Na Sliki 9 je slika vrvi, ki jo prekriva koordinatni sistem, na Sliki 10 pa je z rdečo narisana tudi izračunana oblika.



Slika 9: Slika vrvi s koordinatnim sistemom



Slika 10: Prileganje matematično ustvarjene funkcije s sliko viseče vrvi

Jasno, prileganje ni *popolno*, ampak matematičen izračun vseeno relativno dobro opiše realno stanje. Že meritve niso bile popolnoma točne - natančnost ni bila večja od centimetra - poleg tega pa tudi vrv ni popolnoma ustrezala začetnim pogojem, saj je bila prej zvitna in so določeni notranji pritiski ostali, torej se ni popolnoma raztegnila pod svojo težo. Za dolg težek in gibljiv kabel bi bila aproksimacija verjetno še boljša.

## 7 Zaključek

Problem se je izkazal za precej bolj zapletenega, kot se je na začetku zdel. Precejšnje razočaranje je bilo odkriti, da Jim Emery predlaga najti rešitev na enačbo 24 grafično. Dolgo sem iskal, kako bi se dala enačbo 24 analitično rešiti. Najprej sem hotel uporabiti funkcijo  $x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$ , ampak se je izkazala precej težja za aproksimacijo. Še ko sem enkrat imel boljši inverz, se nisem zavedal, koliko robnih primerov bo nastalo. Vseeno pa so robni primeri način preverjanja, če ima model fizikalni smisel. Na drugi strani pa se je potrebno tudi zavedati, kdaj je model uporaben in v katerih primerih ni več točen. V mojem primeru bi verjetno lahko uporabil drugačno aproksimacijo funkcije  $S(x)$ , če bi želel, da je model natančen za velike vrednosti  $x$ , vendar bi bila takšna aproksimacija zagotovo manj natančna za mahne vrednosti  $x$ . Izkazalo se je, da je moja aproksimacija dokaj točna za vse razen nekaj ekstremnih primerov, in da se model sklada z naravo.

## Literatura

- Dobrushkin, Vladimir (2020). *Lagrange inversion theorem*. Mathematica tutorial. [WWW]. URL: <http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/Mathematica/ch5/lit.html> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 22).
- Emery, Jim (2003). "Estimating the Parameters of a Catenary". V: The STEM Society. URL: <http://www.stem2.org/je/catenary.pdf> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 15–17).
- Fannon, Paul in sod. (2020). "Mathematics for the IB Diploma Programme: Analysis and Approaches HL". V: Hodder Education. Pogl. Further calculus, str. 306 (cit. na str. 20).
- PlanetMath (2013). *equation of catenary via calculus of variations*. [WWW]. URL: <https://planetmath.org/equationofcatenaryviacalculusofvariations> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 7).
- Scherfgen, David (2020). *Integral Calculator*. [WWW]. URL: <https://www.integral-calculator.com/> (pridobljeno 29. 9. 2020) (cit. na str. 10).
- Svirin, Alex (2020). *Equation of Catenary*. Math24. [WWW]. URL: <https://www.math24.net/equation/catenary/> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 7, 11).
- Weisstein, Eric (2020a). *Hyperbolic functions*. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. [WWW]. URL: <https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 12).
- (2020b). *Inverse hyperbolic functions*. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. [WWW]. URL: <https://mathworld.wolfram.com/InverseHyperbolicFunctions.html> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 12).
- Wolfram Alpha (2020). *Wolfram/Alpha: Computational Intelligence*. Wolfram Alpha LLC. [WWW]. URL: <https://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse+1%2Bx%2F6%2Bx%5E2%2F120%2Bx%5E3%2F5040> (pridobljeno 21. 5. 2020) (cit. na str. 23).

Vsi grafi, slike in skice so avtorjevo lastno delo.

Desmos datoteka, ki sem jo sestavil, kjer se lahko simulira v tej raziskovalni nalogi predstavljen problem, se nahaja na tej povezavi: <https://www.desmos.com/calculator/6sv6jo2zcn>.