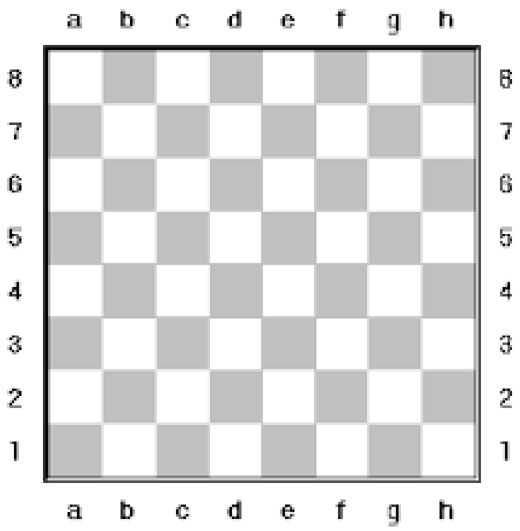
Srednja šola za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo
Zdravstvena pot 1, 1000 Ljubljana

MATEMATIČNI PROBLEMI NA ŠAHOVNICI

RAZISKOVALNA NALOGA

Področje: Matematika



Avtorici: Lana Slapnik in Tinkara Jelenc, 1. letnik

Mentorica: Vesna Jeromen

Somentorica: Hema Vasle

Ljubljana, marec 2021

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

POVZETEK

Problemi na šahovnici imajo dolgo zgodovino in z njimi so se ukvarjali mnogi znani matematiki. V nalogi so predstavljeni matematični problemi na šahovnici, o katerih v slovenskem jeziku ni veliko literature. Izbranih in rešenih je pet problemov: Število kvadratov na šahovnici, Šahovnica in domine, Vsote števil 1, 0 in –1, Produkt števil 1 in –1 in Hroščki na šahovnici. Obravnava vsakega problema vključuje predstavitev problema, reševanje in razširitev. V predstavitvi problema je predstavljen problem, njegov izvor in ponekod tudi možna pot reševanja. V nadaljevanju je zapisano reševanje problema, ki vključuje poskušanje, postavljanje hipotez oziroma trditev in utemeljevanje oziroma dokazovanje. Cilj raziskovalne naloge je bil rešiti izbrane probleme, nato pa rešitve posplošiti na poljubno velikost šahovnice (nxn), kar je predstavljeno v podpoglavju Razširitev. Raziskovalno nalogo je možno uporabiti kot vir dodatnih izzivov za dijake v okviru pouka, dodatnega pouka ali matematičnega krožka.

Ključne besede: šahovnica, matematični problemi, reševanje problemov, posploševanje

1 UVOD

Sva dijakinji, željni novih izzivov, zato je bilo povabilo k sodelovanju pri raziskovalni nalogi kot naročeno. Odločili sva se, da bova raziskovali matematične probleme na šahovnici. Ker se v letošnjem letu pri matematiki veliko pogovarjamo o številih, sva želeli nekaj bolj zabavnega, a da nama bi bilo še vedno v izziv.

Naloge sva se najprej lotili z iskanjem literature, urejanjem oblike raziskovalne naloge in iskanjem idej za probleme. Ustvarili sva podlago in na njej začeli graditi. Najprej sva se posvetili zgodovini šaha in sami igri. Pri tem so nama pomagale številne strokovne knjige. O samem šahu lahko najdemo precej literature, o matematičnih problemih na šahovnici pa sva našli le nekaj virov in tako je najina naloga dejansko postala raziskovalna naloga.

V uvodu sva predstavili enega prvih matematičnih problemov na šahovnici. To je Problem pšeničnih zrn. Odkrili sva, da imajo problemi na šahovnici dolgo zgodovino in da so se z njimi ukvarjali tudi znani matematiki. Predstavili sva dva bolj znana šahovska problema, Skakačev obhod in Problem petih dam.

V nadaljevanju sva se posvetili reševanju petih matematičnih problemov na šahovnici. Vsak problem sva najprej predstavili, nato sva zapisali, kako sva ga reševali, na koncu pa sva problem še posplošili na šahovnico velikosti nxn.

2 TEORETIČNI DEL

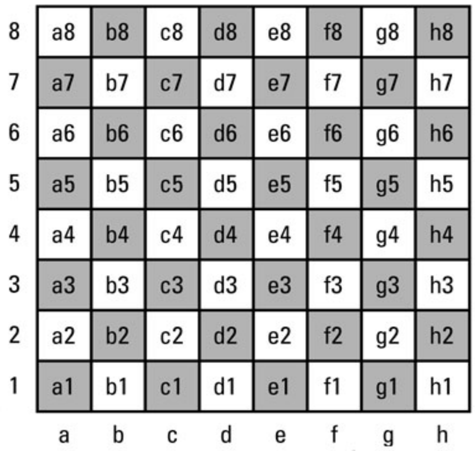
2.1 O ŠAHOVNICI

Ob besedi šahovnica večina ljudi najprej pomisli na igro šah ali pa na ploščo s črno-belimi polji. Pa se najprej posvetimo šahu. Šah je veliko več kot le igra ali šport, je tudi umetnost ali celo znanost (Drinovec, 2002). Po izvoru je šah bojna igra, saj sam nadziraš eno vojsko, nasprotnik pa drugo. O rojstvu šaha ne vemo nič, le teorij je veliko. Verjetno je, da je šah nastal v vojski in se je razvijal postopoma. Ta igra se je širila od vzhoda, proti Arabcem in od njih v Evropo. Šah se je začel med pomembnimi ljudmi uveljavljati v srednjem veku, postopoma pa se je širil tudi med preproste ljudi. Figure pri šahu so odraz takratnega življenja, predvsem vojaškega. V renesansi je šah dobil skoraj končno obliko in pravila, ki jih poznamo danes. V vsej dolgi zgodovini šaha je razvoj temeljil predvsem na prenašanju in nadgrajevanju znanja iz generacije v generacijo (King, 2002).

Že med Arabci je bilo veliko genijev v šahu. Najbolj znani sodobni velemojstri šaha pa so: Gari Kasparov, Max Euwe, Robert Fischer, Magnus Carlsen, Sergej Karjakin, Milan Vidmar, Matej Šebenik, Luka Lenič (Kasparov in Plisecki, 2004 in Wikipedia, Šahovske kategorije in naslovi).

Slika 1: Igranje šaha
(Vir: https://tinyurl.com/3s44a7ku)

Šahovnica je poleg figur osnovno orodje šaha. Sestavlja jo en velik kvadrat, v katerem najdemo 64 majhnih kvadratkov (po 8 v dolžino in po 8 v širino plošče). Od teh je 32 kvadratkov bele (svetle) barve in 32 jih je črne (temne) barve. Navpična polja označujemo z malimi latinskimi črkami a-h, vrste pa z arabskimi številkami 1 – 8. Vsako polje (kvadratek) ima svojo oznako na primer a2, h6… (Bavdek, 1995).



Slika 2: Šahovnica
(Vir: https://tinyurl.com/yc6aans3)

V povezavi s šahom in šahovnico obstaja veliko različnih problemov. Eden prvih je omenjen v legendi o pšeničnih zrnih. Gre za staro legendo, v kateri se je indijski cesar Sheram naučil igrati šah in postal tako navdušen nad to igro, da je želel nagraditi izumitelja te igre (izumiteljev je bilo po vsej verjetnosti več). To je bil učenjak Seth. Prišel je pred cesarja in ta mu je želel ponuditi karkoli, Seth pa je bil na začetku modro tiho. Cesarju je odgovoril, da naslednji dan spet pride, ko bo premislil, kaj si res želi. Njegova želja je bila videti skromna: na vsako polje na šahovnici, mora cesar dati dvakrat toliko pšeničnih zrn kot na prejšnje, pričeti mora z enim zrnom na prvem polju. Kralj se je razjezil in služabnikom rekel, naj prinesejo vrečo pšenice. Matematiki so na dvoru računali, koliko zrn pripada Sethu, a to je trajalo predolgo za cesarjevo potrpežljivost. Ugotovili so, da je nagrada res velika in cesar nima toliko pšeničnih zrn kot si jih je za nagrado zaslužil Seth. Zato te nagrade, s tako velikim številom pšeničnih zrn, učenjak Seth nikoli ni dobil (Šahovski klub Petrinja, Legenda: šah i zrno pšenice).

Slika 3: Legenda o problemu s pšeničnimi zrni
(Vir: https://tinyurl.com/ukrx6554)

Gre za besedilni problem, ki se ga obravnava predvsem v razvedrilni matematiki. Na šahovnici na prvo polje postavimo eno zrno, na drugo dve, na tretje štiri in postopek ponavljamo tako, da za vsako polje podvojimo število zrn iz prejšnjega polja. Zastavimo si vprašanje, na katerega iščemo odgovor, npr. Koliko zrn bo na zadnjem polju šahovnice? Primer šahovnice 8x8 je sestavljen iz 64 polj. Podatek, ki nam je znan, je ta, da se na vsakem naslednjem polju število zrn podvoji.

Problem lahko preprosto rešimo z potenciranjem in seštevanjem. Če števila zrn na posameznih poljih zapišemo s potencami, dobimo geometrijsko zaporedje (Wikipedia, Problem števila zrn na šahovnici).

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = ?$$

Osnova vsake potence je 2, ki nakazuje podvojitev števila zrn na vsakem polju. Eksponenti pa prikazujejo lego vsakega polja (1 za drugo polje, 2 za tretje polje itd.). Po formuli, ki sva jo našli na spletu (Wikipedia, Problem števila zrn na šahovnici), dobimo rezultat, da na šahovnico velikosti 8x8 lahko postavimo 18 446 744 073 709 551 615 (osemnajst trilijonov štiristo šestinštirideset bilijard sedemsto štiriinštirideset bilijonov triinsedemdeset milijard sedemsto devet milijonov petsto enainpetdeset tisoč šeststo petnajst) zrn.

2.2 ZNANI PROBLEMI NA ŠAHOVNICI

Pri raziskovanju sva odkrili, da so nekateri problemi na šahovnici tako zahtevni, da so se z njimi več let ukvarjali tudi znani matematiki, kot je na primer Leonhard Euler. Ukvarjal se je predvsem s problemom Skakačevega obhoda. To je zapleten problem, v katerem nastopata skakač in šahovnica (Wikipedia, Leonhard Euler).

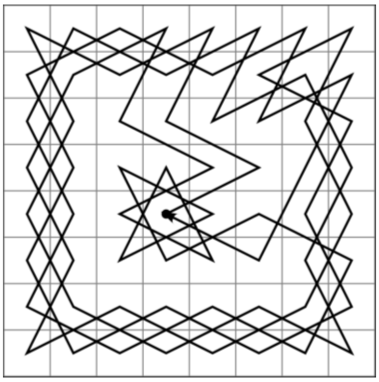
Pri tem problemu mora skakač (konj) s katerega koli začetnega polja na šahovnici, obiskati vsa ostala polja, ne da bi na katero polje skočil večkrat. Največji problem predstavlja sam skakač, ki se lahko premika samo v obliki črke L. Torej eno polje v stran, dve polji naprej ali dve polji v stran in eno naprej (lahko pa se premika v katero koli smer).

Znanih je več načinov reševanja problema. Prvi je seveda način, ko problem poskušamo rešiti z golo silo. To je zelo zahtevno, saj imamo na šahovnicah veliko možnosti. Ta način bi bil primeren predvsem za manjše šahovnice, za velikost 8x8 pa ne. Problem je v številu možnosti in v tem, da začetno mesto skakača ni določeno. Ta način bi nam vsekakor vzel preveč časa.

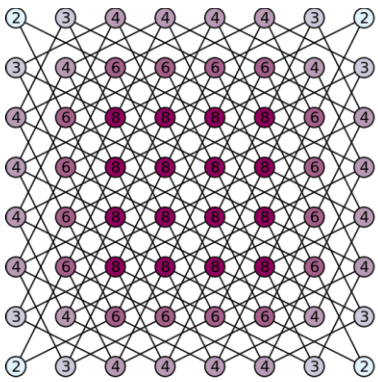
Drugi način se imenuje deli in vladaj. Pri tem sprva razdelimo šahovnico na manjše dele in na vsakem delu sestavimo skakačevo pot, na koncu pa te poti sestavimo skupaj (Wikipedia, Skakačev obhod).

Prvi dejanski postopek reševanja tega problema pa je bilo Warnsdorffovo pravilo (H. C. von Warnsdorff, leta 1823). To pravilo oziroma hevristika (tj. nauk o metodah raziskovanja in pridobivanja novih spoznanj) je zvenela tako: ˝Vedno se premakni na sosednji, neobiskan kvadrat z najmanjšo stopnjo.˝ Stopnja pa je v našem primeru število kvadratov, na katere se lahko iz obstoječega kvadrata premaknemo (pri tem ne upoštevamo že obiskanih kvadratov). Problem pri tej hevristiki je predstavljal nedoločen začetni kvadrat in kaj narediti, ko je skakač obdan z več ne obiskanimi sosednjimi kvadrati z minimalno stopnjo. Njegovo pravilo sta dopolnila še Pohl in Roth (Nauk.si, Warnsdorffov algoritem za problem skakačevega obhoda).

Skakačev obhod lahko zapišemo na več načinov, večinoma si pomagamo s teorijo grafov. Tu si predstavljamo šahovnico kot graf in med seboj povežemo polja, tako kot je skakal skakač iz enega na drugega. Rešitev je več, na slikah spodaj sta prikaza rešitve (Wikipedia, Knight's tour).



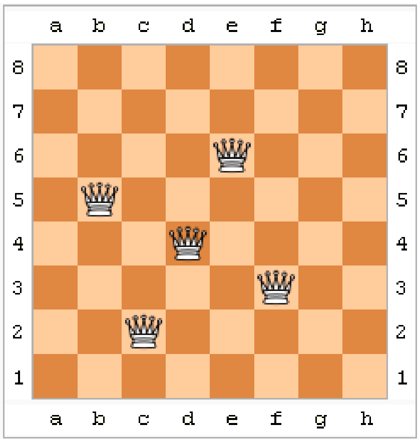
Slika 4: Skakačev obhod
(Vir: https://tinyurl.com/7je4nmxs)



Slika 5: Skakačev obhod
(Vir: https://tinyurl.com/3ur9drbv)

Iz problema Skakačevega obhoda je nastala družabna igra Joust, ki se lahko šteje za različico viteške turneje za dva igralca. Igra je podobna skakačevem obhodu, saj prav tako ne smeš ponovno na polje, na katerem si že bil in se igra le s skakačema (konjema). Podobna je tudi igra Game of Knights (Igra vitezov).

Dobro poznan je še en problem in sicer Problem petih dam (kraljic). Gre za problem, ko moramo na šahovnici razvrstiti dame tako, da ne more nobena napasti druge. Problem lahko rešujemo na več načinov in ima več rešitev. Ta problem bi bil lahko dober za trening šaha, saj moramo dobro poznati pravila, kdaj dama lahko poje figuro in kako se lahko premika (Wikipedia, Problem petih dam).



Slika 6: Problem petih dam
(Vir: https://tinyurl.com/5x2d9yrc=)

Sami se ne bova ukvarjali s šahovskimi problemi in figurami, kot sta problem Petih dam in Skakačev obhod. Teh problemov je veliko in po vsebini niso tako močno povezani s samo matematiko, čeprav jih rešujemo z matematičnimi orodji (teorija grafov, deli in vladaj…). Odločili sva se, da si želiva izzivov, ki bodo povezani z matematiko, zato se bova ukvarjali z matematičnimi problemi na šahovnici. O tem sva našli zelo malo slovenskih virov in nekaj angleških spletnih virov. V slovenski Wikipediji so omenjeni problemi na šahovnici, vendar je njihov glavni pomen premikanje figur. Na slovenski spletni strani Nauk.si (Hafner, 2010) sva našli zapisane naloge iz revije Presek, ki še niso rešene. Preleteli sva jih in ugotovili, da gre v prvi vrsti predvsem za premikanje figur. Nekaj matematičnih problemov na šahovnici je poleg šahovskih in drugih problemov navedenih v knjigi z naslovom Znate rešiti sami? (Kovič, 1996), zato sva izbrali take, ki jih v knjigi ni. Ugotovili sva, da na spletu v slovenskem jeziku ni članka ali raziskovalne naloge, kakršne sva se lotili midve. Našli pa sva hrvaški vir (Vincetić idr., 2018) in angleška vira avtorja Mariusa Gherguja (Ghergu, Matematics on the chessboard) in profesorjev univerze v Utahu, ki so svojim študentom postavili izziv (Tiling a checkerboard, 2018), iz katerih sva črpali ideje za probleme. Z nalogami s spleta si bova seveda pomagali, vendar je najin glavni cilj raziskovanje.

2.3 CILJI RAZISKOVALNE NALOGE

Cilj raziskovalne naloge je rešiti izbrane matematične probleme na šahovnici in poiskati njihove posplošitve za šahovnico velikosti nxn (šahovnico katerekoli velikosti). Rešitve nekaterih problemov so bile že znane, najin prispevek pa je bil pri teh problemih v tem, da sva rešitev posplošili na šahovnico velikosti nxn.

Reševanja vsakega matematičnega problema sva se lotili s poskušanjem in preiskovanjem, najina predvidevanja – hipoteze (matematične trditve) pa sva potem čim bolj jasno utemeljili oziroma dokazali.

2.4 METODE RAZISKOVANJA

Pri raziskovanju sva uporabili metodo dela s strokovno literaturo, praktično preiskovanje problemov, postavljanje trditev, matematično sklepanje, posploševanje in dokazovanje.

3 EMPIRIČNI DEL

3.1 ŠTEVILO KVADRATOV NA ŠAHOVNICI

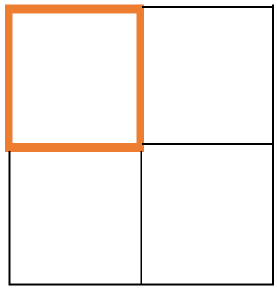
3.1.1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

Imamo šahovnico (8x8 polj) in zanima nas, koliko kvadratov lahko najdemo na tej šahovnici. Gledamo kvadrate različnih velikosti in na različnih mestih na šahovnici. Problem je na spletu zelo pogost, našli pa sva ga na spletni strani Teachingideas.co.uk (How many squares on a chessboard?).

3.1.2 REŠEVANJE

Problema sva se najprej lotili na najmanjši velikosti šahovnice. Na šahovnici 2x2 imamo en velik kvadrat velikosti 2x2, ki obdaja šahovnico in štiri majhne kvadrate velikosti 1x1. Torej imamo na šahovnici velikosti 2x2 skupaj naslednje število kvadratov:

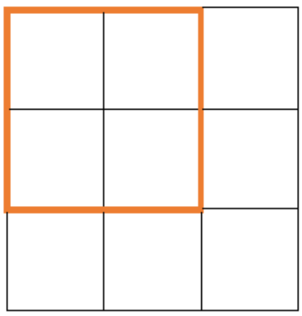
$$1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$



Slika 7: Kvadrat 1x1 na šahovnici 2x2

Na šahovnici 3x3 imamo en večji kvadrat, ki obdaja šahovnico (velikost 3x3) in štiri kvadrate velikosti 2x2 (ker lahko kvadrat velikosti 2x2 postavimo desno zgoraj, levo zgoraj, desno spodaj in levo spodaj) in devet najmanjših kvadratov velikosti 1x1.

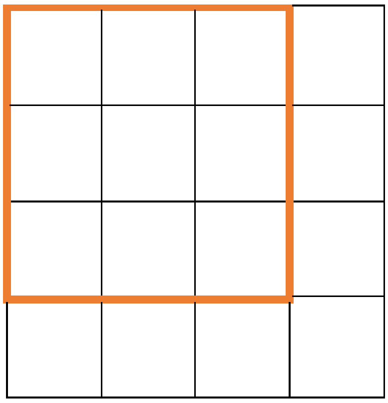
$$1 + 2^2 + 3^2 = 14$$



Slika 8: Kvadrat 2x2 na šahovnici 3x3

Na šahovnici velikosti 4x4 imamo en velik 4x4 kvadrat. Kvadrati velikost 3x3 so štirje, kvadratov 2x2 je devet in kvadratov velikosti 1x1 je šestnajst.

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$



Slika 9: Kvadrat 3x3 na šahovnici 4x4

Na šahovnici 8x8 ponovno začnemo z največjim kvadratom (velikosti 8x8), ki je samo eden, torej 1^2. Nato imamo kvadrate velikosti 7x7, ti so štirje, torej jih je 2^2. Nadaljujemo s kvadrati velikosti 6x6 teh je devet, torej 3^2, in nadaljujemo tako do kvadratov velikosti 1x1, ki jih je 64, torej 8^2. Torej so vsaki naslednji kvadrati za eno polje v dolžino in širino manjši od prejšnjega in jih je vedno »na kvadrat«. Da dobimo, koliko je vseh kvadratov, na koncu le še vse seštejemo:

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$$

3.1.3 RAZŠIRITEV

Kar sva ugotovili v primeru šahovnice 8x8, sva preverili tudi na večji šahovnici, velikosti 10x10. Začneva z največjim kvadratom 10x10 in ta je 1^2, torej 1 kvadrat velikosti 10x10. Naslednji kvadrat je za eno enoto manjši od prejšnjega in število, ki ga kvadriramo, povečamo za ena. Torej imamo kvadratov v velikosti 9x9 ravno $2^2 = 4$. Po logičnem sklepanju bi nato dobili kvadrate v velikosti 8x8, ki jih je $3^2 = 9$. Pravilno smo izračunali, saj smo velikost kvadratov zmanjšali za eno enoto, število teh pa dobili kot kvadrat za ena večjega števila. Nadaljujemo tako do konca. Torej naslednja velikost kvadrata je 7x7, teh kvadratov pa je po najinem razmišljanju: $3 + 1 = 4,\ 4^2 = 4 \cdot 4 = 16$. Za eno enoto manjši kvadrat od prejšnjega je kvadrat velikosti 6x6. Teh mora biti $4 + 1 = 5, 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. Nadaljevanje razmišljanja je prikazano v Tabeli 1.

Tabela 1: Število kvadratov na šahovnici 10x10

velikost kvadratov	število kvadratov
1x1	100
2x2	81
3x3	64
4x4	49
5x5	36
6x6	25
7x7	16
8x8	9
9x9	4
10x10	1

Vse skupaj samo še seštejemo in dobimo končni rezultat – torej število vseh kvadratov na šahovnici velikosti 10x10:

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=385$$

Ko sva izračunali število kvadratov na šahovnici 10x10, sva razmišljali, kako bi to lahko posplošili na šahovnico poljubne velikosti, kar označimo z nxn, kjer je n katero koli naravno število.

Po ugotovitvah od prej sva oblikovali Tabelo 2:

Tabela 2: Število kvadratov na šahovnici nxn

velikost kvadratov	število kvadratov
1x1	n^2
2x2	$(n-1)^2$
3x3	$(n-2)^2$
4x4	$(n-3)^2$
…	…
(n – 1)x(n – 1)	2^2
nxn	1

Na šahovnici nxn je torej vseh kvadratov:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

Na spletu (Brilliant.org, Sum of n, n², or n³) sva našli formulo za vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Formulo sva preverili na primerih za n = 1, n = 2, n = 8 in n = 10.

$$n = 1\colon \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$$

$$n = 2\colon \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6} = 5$$

$$n = 8\colon \frac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6} = \frac{8\cdot 9\cdot 17}{6} = 204$$

$$n = 10\colon \frac{10(10+1)(2\cdot 10+1)}{6} = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$$

Ugotovili sva, da formula v teh primerih drži. Za splošen n pa sva formulo dokazali s pomočjo indukcije. Pri indukciji formulo preverimo za n = 1, potem pa preverimo, ali formula velja tudi za vsak naslednji n.

$n = 1$:

$$\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$$

Ugotovimo, da za n = 1 formula velja, saj je $1^2 = 1$ in po formuli tudi dobimo 1.

Preverimo še, če velja formula za n, ali potem velja tudi za n + 1:

$n \rightarrow n + 1$:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Po drugi strani, lahko formulo uporabimo za n + 1 in pogledamo, če dobimo enako kot zgoraj:

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Matematična ali popolna indukcija je v matematiki metoda dokaza, ki se običajno uporablja za dokazovanje ali je dana trditev ali izrek resničen za vsa naravna števila ali za vse člene neskončnega zaporedja (Wikipedia, Matematična indukcija), zato meniva, da je bila najina izbira za dokazovanje formule pravilna.

Ugotovili sva, da se rezultat pri uporabi formule za n + 1 ujema s prejšnjim za n, kjer smo dodali še $(n + 1)^2$ in tako sva z indukcijo pokazali, da formula za vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil velja.

Torej sva dokazali, da je število kvadratov na šahovnici velikosti nxn enako:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

za vsako naravno število n.

3.2 ŠAHOVNICA IN DOMINE

3.2.1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

Problem je bil postavljen kot izziv študentom v Utahu in sva ga našli v pdf obliki na spletu (Tiling a checkerboard, 2008). Imamo šahovnico s 7x7 polji in domine v velikosti dveh sosednjih polj. Predpostavimo, da je vsaj eno vogalno polje črno.

Odgovorili sva na naslednja vprašanja:

- Ali je možno pokriti z dominami celotno šahovnico velikosti 7x7?
- Ali je možno pokriti šahovnico z dominami, če odstranimo eno vogalno polje?
- Kaj pa če odstranimo belo polje poleg vogalnega polja?
- Natančno določite, katera posamezna polja na šahovnici 7x7 smemo odstraniti, da lahko z dominami pokrijemo vsa ostala polja.

Problem sva razširili še z dvema vprašanjema:

- Kakšna je rešitev problema na šahovnicah 8x8 in 9x9?
- Kakšna je rešitev problema na šahovnici poljubne velikosti (nxn)?

3.2.2 REŠEVANJE

Še preden sva se začeli spopadati s problemom, sva v navodilu zasledili »zanko«, ki sva jo seveda morali rešiti. Po navodilu moramo za reševanje vzeti šahovnico 7x7, ki ima 49 kvadratov (velikosti 1x1). Vsaj eno vogalno polje mora biti črno. Če dobro razmislimo, bodo v tem primeru vsa štiri vogalna polja črna. Do tega pridemo z naslednjim razmišljanjem: prvi kvadrat v vrsti je črn, 2. je bel, 3. je črn, 4. je bel, 5. je črn, 6. je bel in 7. je črn. V resnici pa niti ni potrebno šteti kvadratov in po vrsti razmišljati, katera barva je naslednja. Lahko samo dobro premislimo: imamo 7 kvadratov, to je liho število kvadratov in imamo 2 barvi (sodo število). 7 ni večkratnik števila 2 in 2 ni delitelj števila 7, zato bo 7. kvadrat v vrsti spet črn. Tako se ponovi na vseh stranicah šahovnice, na koncu so torej vsi vogalni kvadrati črni. Na šahovnici 7x7 imamo torej 25 črnih kvadratov in 24 belih.

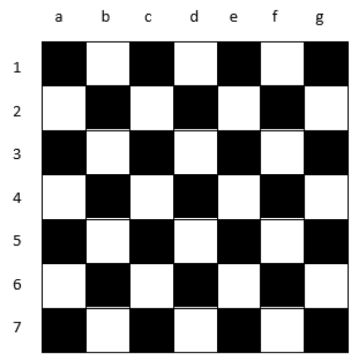
Prvo vprašanje se nama je zdelo dokaj enostavno. Domine so velikosti 1x2, torej zavzemajo dva sosednja kvadrata, enega belega in enega črnega. Ker je na naši šahovnici (7x7) 49 kvadratov, domina pa pokriva 2 sosednja kvadrata, potrebujemo 24 domin za 48 kvadratov, 25 domin za 50 kvadratov. Ponovno se srečamo z delitelji in večkratniki ter razlikami med sodimi in lihimi števili. Ker je 2 sodo število (domina pokrije 2 kvadrata) in 49 je liho število (število kvadratov na šahovnici), to ne gre skupaj. Spet, 2 ni delitelj števil 49 in 25 (število črnih kvadratov), 49 in 25 nista večkratnika števila 2. Sicer je število belih kvadratov (24) večkratnik števila 2 in 2 je delitelj 24, a to nič ne spremeni. Vsa števila bi morala biti deljiva z 2, da bi lahko šahovnico pokrili z dominami. Ugotovimo, da bi na tej šahovnici na več načinov lahko postavili 24 domin (pokrili 48 kvadratov), en kvadrat pa bi vedno ostal nepokrit. V našem primeru bi bil to črn kvadrat, saj imamo liho število (25) črnih in sodo število (24) belih. Če bi dodali še eno domino, bi bil en del domine odveč. Ugotovili sva, da je nemogoče z dominami pokriti vse kvadratke na šahovnici 7x7.

Slika 10: Domine
(Vir: https://tinyurl.com/ar8s26e8)

Vprašali sva se, če je možno, da bi šahovnico 7x7 pokrili z dominami, če odstranimo eno vogalno polje. Ker so vsa vogalna polja črna, bo to mogoče. Šahovnica 7x7 ima 25 črnih polj in 24 belih. Če odstranimo eno črno polje, bo to seveda mogoče, saj bomo imeli le še 24 črnih polj in 24 belih polj (24=24), skupaj imamo nato 48 kvadratov (sodo število kvadratov). Ker je obeh barv kvadratov enako in ena domina pokrije dva sosednja kvadrata obeh barv, bomo porabili 24 domin da pokrijemo našo šahovnico brez enega vogalnega kvadrata (šahovnica ima v tem primeru 48 kvadratov). Če to povemo še z delitelji in večkratniki: 2 je delitelj števila 48 in števila 24 (število belih/črnih kvadratov), 48 in 24 sta večkratnika števila 2.

Če pa bi na naši šahovnici 7x7 odstranili eno belo polje (ki se nahaja poleg vogalnega črnega), bi bil rezultat malo drugačen. Potem bi imeli 23 belih polj in 25 črnih. Morda se to sliši dobro, saj na koncu dobimo 48 polj in to je sodo število. A ugotovili sva, da take šahovnice ne moremo pokriti z dominami, saj domina pokriva dva sosednja kvadrata. Torej pokrije enega črnega in enega belega. Torej nam ostaneta dve nesosednji črni polji. Ugotovimo, da mora biti za rešitev problema enako belih in črnih polj.

Zanimalo naju je še, katero polje bi lahko na šahovnici odstranili, da bi lahko še vedno pokrili vse kvadrate. Najprej so to seveda vsi vogalni črni kvadrati, to so polja: a8, g8, a1, g1. Katerega koli od teh odstranimo, bomo lahko pokrili šahovnico z dominami. Vsa ta polja so črna, kar pomeni, da imamo po odstranitvi posameznega vogalnega polja le še 24 črnih kvadratov, 24 belih, skupaj pa je to 48. Že prej smo ugotovili, da se to s pokrivanjem izide, saj so vsa števila soda. Po tem razmišljanju predvidevava, da lahko odstranjujemo le črna polja, ker jih je na začetku liho število in več kot belih (25). To sva seveda poizkusili dokazati s praktičnim delom – pokrivali sva šahovnico 7x7 na več načinov. Ugotovili sva, da vedno ostane ene črno polje, ki ga lahko odstranimo. Torej lahko na šahovnici 7x7 odstranimo katerokoli črno polje in bo šahovnico možno pokriti z dominami.



Slika 11: Šahovnica s poudarjenimi polji

3.2.3 RAZŠIRITEV

Odločili sva se problem preučiti tudi na šahovnici velikosti 8x8 in 9x9. Na šahovnici 8x8 imamo 32 belih in 32 črnih kvadratov. Na tej šahovnici ne moremo imeti vseh vogalnih polj iste barve, saj se pri sodih številih to ne izide. Šahovnico 8x8 lahko pokrijemo z dominami, saj imamo 32 belih polj in 32 črnih polj, skupaj 64 polj. Imamo enako število črnih in belih polj, zato se vse da pokriti. Pri šahovnici 9x9 pa je enaka zgodba kot pri šahovnici 7x7, saj imamo liho število vseh polj, to je 81 polj. Če so vsa vogalna polja črna, imamo 41 črnih pol in 40 belih. Enako kot pri šahovnici 7x7 se ne da pokriti te šahovnice z dominami. Če bi to hoteli, moramo odstraniti katerokoli črno polje (pod pogojem, da je črnih več). Tako bi dobili 40 črnih polj (41 – 1 = 40) in 40 belih polj, vseh skupaj 80. Vsa števila so soda in tako šahovnico 9x9 bi pa lahko pokrili z dominami.

Razmišljali sva tudi o tem, kako bi lahko problem razširili na šahovnico nxn. Iz najinega reševanja primerov za šahovnice 2x2 do 9x9 sklepava, da se bo rešitev razlikovala, če bo n sodo ali liho število. Če bo n sodo, bomo imeli na šahovnici sodo število vseh kvadratov velikosti 1x1. In imeli bomo enako število belih in črnih kvadratov in tudi ti dve števili bosta sodi. Torej so vsa števila soda in imamo enako število belih in črnih kvadratov, zato bomo lahko šahovnico (n je sodo število) pokrili z dominami. Če pa bo n liho, ima šahovnica liho število vseh kvadratov in števili belih in črnih kvadratov se bosta razlikovali (eno bo sodo in eno liho). Ker vsa števila ne bodo soda in ker imamo različno število belih in črnih kvadratov, šahovnice (n je liho število) ne moremo pokriti z dominami. To bi lahko naredili le, če bi odstranili katerokoli polje enake barve kot so vogalna polja. Tako bi dobili sodo število vseh kvadratov in enaki sodi števili belih in črnih kvadratov.

3.3 VSOTE ŠTEVIL 1, 0 IN -1

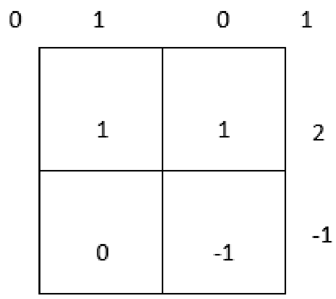
3.3.1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

Problem z vsotami števil sva našli pri Mariusu Ghergu (Matematics on the chessboard). Imamo šahovnico velikosti 8x8. Na vsako polje lahko vpišemo število – 1, 0 ali 1. Ali je možno števila na šahovnico vpisati tako, da dobimo same različne vsote teh števil (gledamo vsote po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah)?

3.3.2 REŠEVANJE

Skozi raziskovanje so naju vodila naslednja vprašanja:

- Ali je to možno narediti na šahovnici velikosti 2x2? Kaj pa na šahovnici velikosti 3x3?
- Ali je to možno narediti na šahovnici velikosti 8x8? Poišči dokaz za svojo trditev.
- Sklepaj, ali je možno dobiti različne vsote na šahovnicah velikosti nxn in dokaži trditev.



Slika 12: Prikaz reševanja problema

Na najmanjši šahovnici 2x2 sva se lotili reševanja s poizkušanjem, a nama je to kljub majhni šahovnici vzelo kar nekaj časa. Ugotovili sva, da je to nemogoče. Za večje šahovnice sva želeli najti način, kako lahko hitreje ugotoviva, ali bova dobili povsod različne vsote ali ne. Ugotovili sva, da morava najprej ugotoviti, koliko različnih vsot rabimo in nato koliko jih sploh lahko dobimo s kombinacijami števil –1, 0 in 1. Pri šahovnici 2x2 potrebujemo dve različni vsoti v stolpcih, dve v vrsticah in dve po diagonalah. Skupaj je to 6 različnih vsot. Možnih pa je samo 5 različnih vsot:

1. $1 + 1 = 2$
2. $1 + 0 = 1$
3. $1 - 1 = 0 + 0 = 0$
4. $0 - 1 = -1$
5. $-1 - 1 = -2$

Na šahovnici 2x2 lahko dobimo samo 5 različnih vsot, potrebujemo pa jih 6, torej na šahovnici 2x2 ne moremo dobiti samih različnih vsot.

Za šahovnico 3x3 sva ugotovili, da rabimo $3 \cdot 2 = 6$, torej 6 vsot za vrstice in stolpce in še dve za diagonali. Torej potrebujemo $3 \cdot 2 + 2 = 8$ različnih vsot. S števili –1, 0, 1 pa lahko dobimo le vsote: –3, –2, –1, 0, 1, 2 in 3, kar je 7 različnih vsot. To so cela števila od –3 do 3.

Problem lahko razširimo na šahovnico velikosti 8x8. Tu potrebujemo $8 \cdot 2 + 2 = 18$ različnih vsot, dobimo pa lahko samo vsote od –8 do 8, torej 17 različnih vsot, kar je ponovno ena premalo.

3.3.3 RAZŠIRITEV

Če problem posplošimo na šahovnico velikosti nxn, ugotovimo, da dobimo vedno eno vsoto premalo, da bi lahko našli rešitev. Za šahovnico nxn si lahko pomagamo s temi formulami:

1. Za ugotovitev, koliko različnih vsot potrebujemo:

$$n \cdot 2 + 2$$

2. Za ugotovitev, koliko vsot lahko dobimo:

$$n \cdot 2 + 1$$

Torej sva pokazali, da imamo vedno eno vsoto premalo, da bi lahko dobili same različne vsote po vrsticah, stolpcih in diagonalah.

3.4 PRODUKTI ŠTEVIL -1 IN 1

3.4.1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

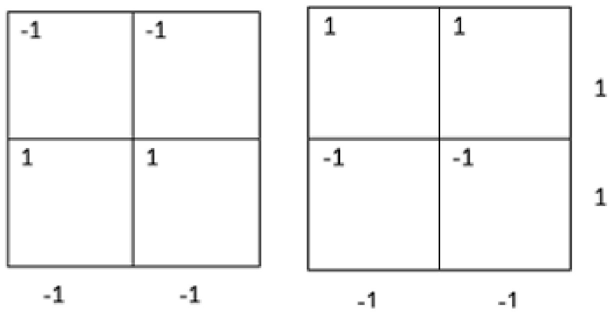
Problem s produkti števil sva našli pri Mariusu Ghergu (Matematics on the chessboard). Imamo šahovnico velikosti 7x7. Na vsako polje lahko vpišemo število -1 ali 1. Problem je naslednji: Ali je možno števila zapisati na šahovnico tako, da dobimo v vsaki vrstici produkt 1, v vsakem stolpcu pa produkt -1?

3.4.2 REŠEVANJE

Pri reševanju sva poskušali odgovoriti na naslednja vprašanja:

- Ali je to možno narediti na šahovnici velikosti 2x2? Kaj pa na šahovnici velikosti 3x3?
- Na primeru 2x2 in 3x3 poglej, kaj dobiš, če zmnožiš produkte števil po vrsticah med seboj. Kaj pa dobiš, če zmnožiš produkte števil po stolpcih med seboj? Bi moralo to biti enako? Zakaj?
- Ali je možno postaviti -1 in 1 po pravilih na šahovnici velikosti 7x7? Kaj pa na 8x8?
- Posploši svojo trditev na šahovnice velikosti nxn in trditev dokaži.

Na šahovnici 2x2 sva ugotovili, da lahko v obeh stolpcih dobimo rešitev -1, v obeh vrsticah pa 1. Do rešitve sva prišli s poskušanjem. Našli sva dva načina:



Slika 13: Dve možni rešitvi problema na šahovnici 2x2

Problema sva se s poskušanjem lotili tudi na šahovnici 3x3 in ugotovili, da tukaj rešitve ni. Dobili sva mnogo različnih kombinacij, a nobena ni bila prava. Začeli sva razmišljati, kako bi dokazali, zakaj je problem rešljiv na šahovnici 2x2, na 3x3 pa ne.

Sklepali sva, da je razlika pri šahovnici velikosti sodega krat sodega števila in lihega krat lihega števila – pri sodih se izide, pri lihih pa ne. Da bi se prepričali, sva nadaljevali z reševanjem drugega vprašanja.

Če med seboj pomnožimo produkte po vrsticah na šahovnici 2x2, dobimo rezultat 1, ki je pozitiven, če pa med seboj pomnožimo produkte po stolpcih, dobimo prav tako rezultat 1, kar pomeni, da sta si rezultata enaka.

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ugotovili sva, da rezultat pravzaprav mora priti enak, ker, če zmnožimo produkte števil po vrsticah, dobimo produkt vseh števil na šahovnici, enako pa dobimo produkt vseh števil na šahovnici tudi, če zmnožimo produkte števil po stolpcih, ker je vrstni red množenja nepomemben.

Če zmnožimo vse produkte vrstic in vse produkte stolpcev med seboj pri šahovnici 2x2, dobimo:

$$1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$$

Dobili smo pozitiven rezultat 1, ki je enak produktu kvadratov vseh števil na šahovnici, kar mora biti enako 1.

Predpostavimo, da se da problem rešiti tudi na šahovnici 3x3 (čeprav rešitve nisva našli). Če med seboj zmnožimo produkte števil po vrsticah, dobimo 1 ($1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$), če pa zmnožimo produkte števil po stolpcih, pa dobimo -1 ($(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$). Ta dva rezultata nista enaka. Sklepamo lahko, da, če bi se dalo zapisati števila na šahovnico 3x3 po pravilih, ki jih postavimo v problemu, produkt teh števil ne bi bil enak, če enkrat množimo po stolpcih, drugič pa po vrsticah. To je v nasprotju z matematičnimi zakoni in sva dokazali, da na šahovnici velikosti 3x3 rešitev problema ne obstaja.

Če med seboj zmnožimo še vse rezultate produktov tako po vrsticah kot tudi po stolpcih, pa dobimo:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Potem bi na šahovnici 3x3 moralo veljati, da je produkt kvadratov vseh števil enak –1, kar pa ni mogoče. Zgornje potrjuje, da na šahovnici 3x3 rešitve problema o produktih števil 1 in -1 ni.

Na šahovnici 7x7 nisva našli rešitve, na šahovnici 8x8 pa sva. Tu vidiva enak problem. Najprej sva skicirali šahovnico 8x8 in našli eno od rešitev:

-1	1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	1	1	1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	1
-1	1	1	1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	

Slika 14: Prikaz rešitve problema na šahovnici 8x8

Spet lahko razmišljamo, koliko dobimo, če med seboj zmnožimo produkte števil po vrsticah. Dobimo rezultat 1. In če med seboj zmnožimo produkte števil po stolpcih, prav tako dobimo 1. Torej dobimo enaka rezultata pri množenju po vrsticah in po stolpcih.

3.4.3 RAZŠIRITEV

Če problem razširiva na šahovnico velikosti nxn, moramo ločiti, če je n sodo ali liho število.

V primeru, da je n sodo število, pride produkt produktov števil po vrsticah enak:

$$1^n = 1,$$

produkt produktov števil po stolpcih, pa je:

$$(-1)^n = 1.$$

Ker je n sodo število, sta si rezultata enaka. Produkta rezultatov in vrstic si morata biti enaka, saj sta to le dva različna vrstna reda, da med seboj zmnožimo vsa števila na šahovnici. Ker ne glede na vrstni red množenja dobimo enak rezultat, lahko števila na šahovnico postavimo po danih navodilih.

Če postopek s produkti po stolpcih in vrsticah ponovimo še na lihi šahovnici (n je liho število), pride produkt produktov števil po vrsticah:

$$1^n = 1.$$

Produkt produktov števil po stolpcih pa je:

$$(-1)^n = -1.$$

Rezultata na lihi šahovnici si med seboj nista enaka. Torej rešitev ne obstaja, saj števil v šahovnico ne bi morali vstaviti na način kot zahtevajo navodila. Ne moremo jih postaviti, ker to ne bi bilo v skladu z matematičnim zakonom o zamenjavi, ki je osnova rešitve tega problema.

Ta dva rezultata si morata biti enaka saj, če med seboj zmnožimo produkte števil v vrsticah, je to produkt čisto vseh števil na šahovnici, prav tako je produkt čisto vseh števil na šahovnici, če med seboj zmnožimo produkte stolpcev. Enaka si morata biti, saj pri množenju velja zakon o zamenjavi, torej kakorkoli množimo vsa števila na šahovnici, nam mora rezultat priti enak, kot če števila množimo v čisto drugačnem vrstnem redu.

Če pa med seboj zmnožimo še vse produkte, tako po vrsticah kot tudi po stolpcih, pa dobimo, če je n sodo število:

$$1^n \cdot (-1)^n = 1$$

Dobimo pozitiven rezultat 1, saj drži ta formula:

$$(produkt\ vseh\ števil\ po\ stolpcih\ in\ vrsticah)^2 = 1$$

Saj vsi vemo, da se minus pri kvadriranju izniči:

$$1^2 \cdot (-1)^2 = 1$$

Če ne dobimo 1, ni možno vstaviti števil v šahovnico tako, kot od nas zahtevajo navodila. In ugotovili sva, da to ni mogoče pri lihih številih:

$1^n \cdot (-1)^n = -1$, če je n liho število, torej ni rešitve, če delamo po naših navodilih,

$1^n \cdot (-1)^n = 1$, če je n sodo število, obstaja rešitev za našo nalogo.

Na dva načina sva pokazali, da ima problem rešitev samo na šahovnicah velikosti nxn, kjer je n sodo število. Če je n liho število, pa rešitev ne obstaja.

3.5 HROŠČKI NA ŠAHOVNICI

3.5.1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

Problem je bil predstavljen na spletni strani The math doctors (Peterson, 2018). Problem naj bi izviral iz Indije in bil postavljen na Državnem tekmovanju iz matematike za 9. razred. Glasi se takole: Na šahovnico 9x9 položimo 65 hroščkov, na vsako polje enega. Ti se lahko vsakokrat premaknejo le na sosednje (s skupno stranico povezano) polje v vodoravni ali navpični smeri. Noben hrošček ne more narediti dveh zaporednih navpičnih ali vodoravnih premikov. Pokaži, da bosta po nekaj premikih vsaj dva hroščka na istem polju.

3.5.2 REŠEVANJE

Pri reševanju sva poskušali odgovoriti na naslednja vprašanja:

- Ali je to možno narediti na šahovnicah velikosti 2x2, 3x3, 4x4, 5x5?
- Ali bi bilo možno na šahovnico 9x9 postaviti 64 hroščkov, ne da bi se dva znašla na skupnem polju? Kako se gibajo hroščki ob vsakem premiku? Gibanje opiši z barvami na šahovnici. Zakaj ne moremo imeti 65 hroščkov, ne da bi se po premikanju dva znašla na istem polju?
- Posploši svojo trditev na šahovnice velikosti nxn in trditev dokaži.

Najin zadnji problem sva za začetek prestavili na najmanjšo šahovnico, velikosti 2x2. Najprej sva morali razmisliti, koliko hroščkov sploh potrebujemo, da bo problem enak osnovnemu problemu. Če imamo na šahovnici 9x9 65 hroščkov, to pomeni, da na šahovnici 2x2 potrebujemo 2 hroščka. Do tega rezultata smo prišli, ker je pri šahovnici 9x9 65 hroščkov, to število pa dobimo, ko ugotovimo, koliko polj ima za 1 manjša šahovnica od naše in temu številu prištejemo 1:

$$9 - 1 = 8$$

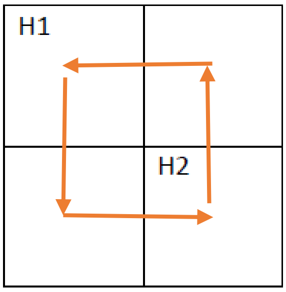
$$8 \cdot 8 = 64$$

$$64 + 1 = 65$$

Splošna formula za število hroščkov na šahovnici nxn:

$$(n-1) \cdot (n-1) + 1 = število\ hroščkov$$

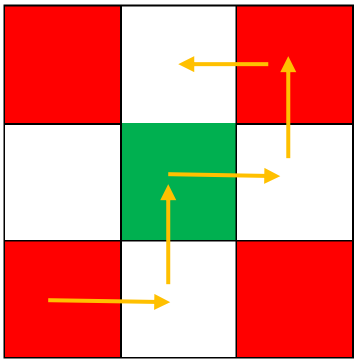
Na šahovnici 2x2 torej potrebujemo $1 \cdot 1 + 1 = 2$ hroščka. S poskušanjem sva ugotovili, da se ob premikanju navpično in vodoravno hroščka lahko nikoli ne srečata, če ju na šahovnico postavimo npr. diagonalno:



Slika 15: Prikaz reševanja problema na šahovnici 2x2

Hroščka se tako lahko oba istočasno premikata v smeri urinega kazalca ali v nasprotni smeri. (Na primer, oba naenkrat se premakneta, in sicer H1 navpično dol in H2 navpično gor, nato H1 vodoravno desno in H2 vodoravno levo, zdaj se H1 premakne navpično navzgor in H2 navpično navzdol, nato pa se H1 premakne vodoravno levo in H2 vodoravno desno, … Oba sta prišla do svojega začetnega polja, ne da bi bila kadarkoli vmes oba na istem polju). To kroženje se lahko nadaljuje v neskončnost in se ne bosta nikoli srečala na istem polju.

Na šahovnici 3x3 potrebujemo $2 \cdot 2 + 1 = 5$ hroščkov. S poskušanjem sva ugotovili, da rešitev ne obstaja, da imamo preveč hroščkov oziroma premalo možnosti za premikanje hroščkov.



Slika 16: Prikaz reševanja problema na šahovnici 3x3 z barvami

Na šahovnici sva si pomagali z barvami rdeča (R), bela (B) in zelena (Z), ki ga kot način reševanja predlaga avtor prispevka na spletni strani The math doctors (Peterson, 2018). Hroščki se gibajo po barvah tako: R→B_1→Z→B_2..., to zaporedje se nato ponavlja znova in znova.

Najprej pogledamo, koliko hroščkov je v začetku lahko na posamezni barvi glede na to, kako se premikajo v nadaljevanju (vedno pridejo tudi na zeleno polje, ki je samo eno):

Z: 1 na Z, ker je eno zeleno polje

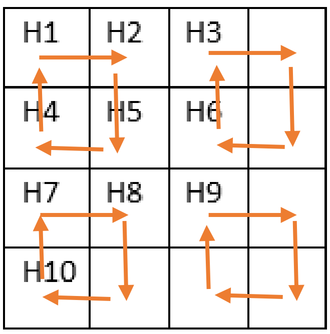
R: n na R → n na B_1 → n na Z, torej je $\mathrm{n} \leq 1$, ker imamo 1 zeleno polje

B_2: m na B_2 → m na R → m na B_1→ m na Z, torej je $m \leq 1$, ker imamo 1 zeleno polje

B_1: k na B_1 → k na Z, torej je $k \leq\ 1$, ker imamo 1 zeleno polje

Ker v nekem trenutku pridejo vsi hroščki na zelena polja, je lahko na začetku največ 1 hrošček na polju posamezne barve R, Z, B_1, B_2. Skupaj so lahko na šahovnici največ 4 hroščki. Nemogoče jih je na šahovnico postaviti 5, saj bi bila na zelenem polju v nekem trenutku dva hroščka.

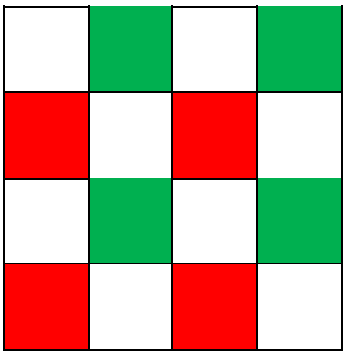
Naslednja šahovnica, na kateri sva iskali rešitev, je šahovnica velikosti 4x4. Na tej imamo 10 hroščkov, ki so lahko postavljeni tako:



Slika 17: Prikaz reševanja problema na šahovnici 4x4

Če vsi hroščki krožijo v smeri urinega kazalca, se ne bodo nikoli srečali, tudi če bi imeli toliko hroščkov, kolikor je polj, torej 16.

Problem lahko rešimo tudi s pomočjo barv, tako hroščkov ne omejimo na premikanje v krogu. Ponovno uporabimo tri barve (rdečo, zeleno in belo).



Slika 18: Prikaz reševanja problema na šahovnici 4x4 z barvami

Hroščki se gibajo po enakem vrstnem redu, kot pri šahovnici 3x3, torej: $R \rightarrow B_1 \rightarrow Z \rightarrow B_2$… in nato v enakem vrstnem redu naprej. Spet najprej pogledamo, koliko je lahko hroščkov na začetku na posamezni barvi:

Z: največ 4

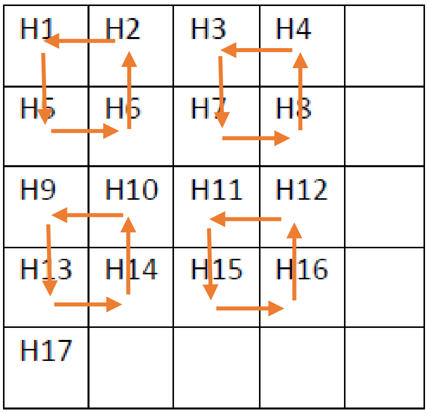
B_1: največ 4

B_2: največ 4

R: največ 4

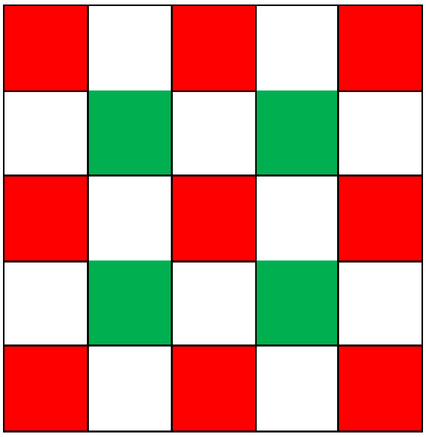
Skupaj je to največ $4+4+4+4=4 \cdot 4=4^2=16$ hroščkov, to je toliko kot je vseh polj na šahovnici 4x4, mi pa želimo na šahovnici imeti le $3 \cdot 3+1=10$ hroščkov. Torej rešitev obstaja.

Naslednja šahovnica je v velikosti 5x5, kjer moramo na šahovnico dati 17 hroščkov, ki se med sabo ne bodo srečali. Sprva sva razmislili, ali je možno te hroščke razvrstiti tako, da se bi gibali v smeri urinega kazalca, a sva ugotovili, da je to nemogoče.



Slika 19: Prikaz reševanja problema na šahovnici 5x5

Poskusili sva najti tudi rešitev s pomočjo barv:



Slika 20: Prikaz reševanja problema na šahovnici 5x5 z barvami

Na šahovnico bi morali postaviti 17 hroščkov, gibljejo pa se v enakem zaporedju kot na prejšnjih šahovnicah (R→B_1→Z→B_2…). Poglejmo, koliko jih je lahko na začetku na določenih barvah:

Z: 4 na Z, ker imamo 4 zelena polja

R: n na R → n na B_1 → n na Z, torej je $n \leq 4$, ker imamo 4 zelena polja

B_2: m na B_2 → m na R → m na B_1→ m na Z, torej je $m \leq 4$, ker imamo 4 zelena polja

B_1: k na B_1 → k na Z, torej je $k \leq 4$, ker imamo 4 zelena polja

Vse skupaj bi na šahovnici lahko imeli le 16 hroščkov, ki se ob pravilni postavitvi ne srečajo. Ker v določenem trenutku vsi pridejo na zelena polja, so lahko na vsaki barvi polj največ 4 hroščki. Če bi dodali še enega, bi bilo v nekem trenutku na zelenem polju več hroščkov hkrati, česar pa ne želimo. Rešitve na šahovnici 5x5 ni.

Na šahovnico velikosti 9x9 bi lahko postavili 64 hroščkov in se med seboj ne bi srečali, saj je na vsaki barvi lahko 16 hroščkov, saj je 16 zelenih polj (teh je najmanj) in odločajo o tem, koliko hroščkov je lahko na posameznih poljih:

Z: 16 na Z, ker imamo 16 zelenih polj

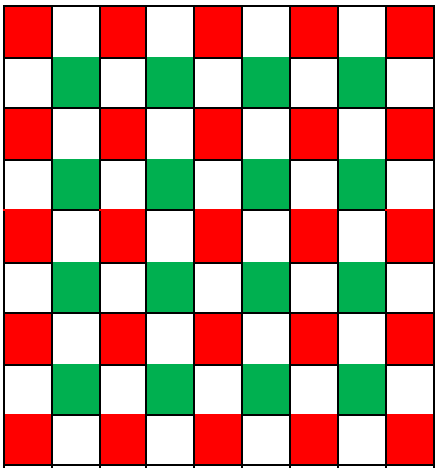
R: n na R → n na B_1 → n na Z, torej je $\mathrm{n} \leq 16$, ker imamo 16 zelenih polj

B_2: m na B_2 → m na R → m na B_1→ m na Z, torej je $m \leq 16$, ker imamo 16 zelenih polj

B_1: k na B_1 → k na Z, torej je $k \leq 16$, ker imamo 16 zelenih polj

Skupaj bi torej na šahovnici velikosti 9x9 imeli največ: $16 + 16 + 16 + 16 = 64$ hroščkov, oziroma $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$ hroščkov. Ti hroščki se med seboj ne bi srečali.

Če pa bi na šahovnico 9x9 želeli postaviti 65 hroščkov, bi se v nekem trenutku dva hroščka srečala na istem zelenem polju. Zato je nemogoče imeti na šahovnici 9x9 več kot 64 hroščkov, ne da se med seboj srečajo.



Slika 21: Prikaz reševanja problema na šahovnici 9x9 z barvami

3.5.3 RAZŠIRITEV

Na šahovnici nxn sva ugotovili, da se rešitvi razlikujeta, če je n sodo ali liho število. Če je n liho število, je rešitev povezana s številom zelenih polj na šahovnici, ki jih je na lihih šahovnicah najmanj. Število zelenih polj na šahovnici nxn za liho število n dobimo po formuli:

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

In ker imamo štiri različne barve, na katerih bodo lahko v začetku postavljeni hroščki (dve vrsti bele barve) to pomnožimo še s 4:

$$4 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

In nato lahko krajšamo števila in na koncu dobimo splošno formulo za število hroščkov, ki se ne bodo srečali, na šahovnici nxn, kjer je n liho število:

$$\frac{4 \cdot (n-1) \cdot (n-1)}{2 \cdot 2} = \frac{(n-1) \cdot (n-1)}{1} = (n-1) \cdot (n-1) = (n-1)^2$$

Pri sodi velikosti šahovnice je splošna formula drugačna. Na teh šahovnicah imamo enako število vseh polj različnih barv. Število polj posamezne barve na šahovnici nxn za sodo število n je enako:

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$$

Formula za število hroščkov, ki se ne bodo srečali na šahovnici nxn (n je sodo število), je:

$$4 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{4 \cdot n \cdot n}{2 \cdot 2} = \frac{n \cdot n}{1} = n^2$$

Torej imamo na šahovnici nxn, kjer je n sodo število, lahko toliko hroščkov, kolikor je polj, in se hroščki med seboj lahko ne bodo srečali. Problem je možno rešiti na vseh sodih šahovnicah.

4 ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi sva predstavili pet matematičnih problemov na šahovnici. Vsak problem sva najprej opisali, nato zapisali potek reševanja problema, na koncu pa sva rešitev posplošili na poljubno velikost šahovnice (nxn).

V prvem problemu (Število kvadratov na šahovnici) sva odkrili, da je število vseh različno velikih kvadratov na šahovnici velikosti nxn enako za vsako naravno število n:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Trditev sva na manjših šahovnicah preverili s poskušanjem, za splošen n pa sva jo dokazali s pomočjo matematične indukcije in se s tem naučili novega načina dokazovanja matematičnih trditev.

V drugem problemu (Šahovnica in domine) sva poskušali različno velike šahovnice pokrivati z dominami in odkrili, da na rešitev vpliva, ali je pri šahovnici nxn n sodo ali liho število. Pri lihem n moramo odstraniti katerokoli polje, ki je enake barve kot vogalna polja, za sode n pa šahovnico lahko pokrijemo z dominami, ne da bi odstranili kakšno polje.

V tretjem problemu (Vsote števil 1, 0 in –1) naju je zanimalo, ali je možno števila –1, 0 in 1 na šahovnico postaviti tako, da dobimo same različne vsote teh števil (gledamo vsote po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah) in odkrili sva, da problem ni rešljiv, saj imamo premalo različnih vsot $(n \cdot 2 + 1)$ glede na to, koliko jih potrebujemo $(n \cdot 2 + 2)$.

V četrtem problemu (Produkti števil 1 in –1) naju je zanimalo, ali je možno števila 1 in –1 na šahovnico zapisati tako, da dobimo v vsaki vrstici produkt 1, v vsakem stolpcu pa produkt -1. Odkrili sva, da se rešitev razlikuje glede na velikost šahovnice. Za šahovnice nxn, kjer je n sodo število, je to možno narediti, če pa je n liho število, pa rešitev ne obstaja. Našli sva dva dokaza – pri prvem sva si pomagali z zakonom o zamenjavi za množenje, saj sva množili števila na šahovnici po vrsticah in po stolpcih, pri drugem pa sva upoštevali, da pri kvadriranju števil vedno dobimo pozitivno število.

V petem in tudi zadnjem primeru (Hroščki na šahovnici) naju je zanimalo, koliko hroščkov lahko postavimo na šahovnico velikosti nxn, da je možno, da se pri gibanju po navodilih ne bodo srečali. Odkrili sva, da se rešitev razlikuje za sode in lihe dimenzije šahovnice. Na šahovnico velikosti nxn, kjer je n sodo število, lahko postavimo n^2 hroščkov in problem rešimo, za n je liho število, pa jih lahko postavimo $(n-1)^2$ in s tem problem ni rešljiv.

V raziskovalni nalogi sva uživali – tako ob tem, ko sva poskušali priti do rešitev sami, kot tudi ob branju virov, kjer so bili navedeni poskusi in poti reševanja drugih. Med samim procesom raziskovanja pa sva se tudi zelo dobro počutili, ker sva ugotovili, da so bili matematični problemi na šahovnici predmet raziskovanj, večkrat tudi večletnih, velikih in znanih matematikov, ter da so se pojavljali tudi na matematičnih tekmovanjih.

V nadaljevanju bi se najina raziskovalna pot lahko nadaljevala skoraj na enako načinov kot v zgodbi o zrnih na šahovnici. Lahko bi našli nešteto izzivov, ki bi jih opredelili kot matematični problem in ga vključili v raziskovalno nalogo ali k reševanju povabili še prijatelje. Mogoče bi pri določenih problemih lahko našli več možnih načinov reševanja, ali celo rešitev. Lahko pa bi z majhnimi spremembami iz najinih problemov dobili nove. Naj naštejeva le nekaj idej za probleme, ki bi jih še lahko raziskali:

- Koliko različnih pravokotnikov lahko najdemo na šahovnici 8x8?
- Ali lahko pokrijemo z dominami dolžine tri (tromini) šahovnico 8x8?
- Koliko trikotnikov lahko postavimo na šahovnici 8x8?
- Ali je možno števila –2, –1, 0, 1, 2 na šahovnico vpisati tako, da dobimo same različne vsote teh števil (gledamo vsote po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah)?
- Ali bi lahko problem s hroščki na šahovnici rešili, če bi se hroščki lahko premikali tudi diagonalno?

Ob raziskovalni nalogi sva dejansko uživali in ugotovili, da je matematika zelo uporabna za reševanje izzivov, ter da je lahko tudi zabavna. Naučili sva se preprostega sklepanja, uporabo indukcije in splošnega dokazovanja. Predstavljene probleme na šahovnici bi lahko uporabili tudi pri pouku kot dodaten izziv za dijake ali pa pri dodatnem pouku ali matematičnem krožku. Verjameva, da bi jih dijaki z veseljem reševali in da bi se pri tem tudi veliko novega naučili.

5 VIRI IN LITERATURA

Bavdek, Srdan V. (1995). *Šah: igra in razvedrilo.* Ljubljana: Mladinska knjiga.

Brilliant.org, *Sum of n, n², or n³.* (Ogledano 4. 1. 2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://brilliant.org/wiki/sum-of-n-n2-or-n3/

Drinovec, A. (2002). *Slovenski šah.* Ljubljana: Kmečki glas za Šahovsko zvezo Slovenije.

Ghergu, M. *Matematics on the chessboard.* (Ogledano 27. 2. 2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://tinyurl.com/47nvxs2k

Hafner I. (1984). *Šahovski problemi R. Smullyana.* V: Presek, letn. 11, št. 4, str. 169 - 170 (Ogledano 28.12.2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://tinyurl.com/2kzhk5f4

Kasparov, G., Plisecki, D. (2004). *Moji veliki predhodniki.* Maribor: Šahohlačnik – zavod za napredek šaha.

King, D. (2002). *Šah: Od prvih potez do mata*. Radovljica: Didakta.

Kovič, J. (1996). *Znate rešiti sami?* Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Nauk.si*, Warnsdorffov algoritem za problem skakačevega obhoda.* (Ogledano 9. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: http://www2.nauk.si/materials/865/out-250655/index.html#state=6

Peterson, D. (2018) *A Different Kind of Chessboard Problem*. (Ogledano 15.2.2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://www.themathdoctors.org/a-different-kind-of-chessboard-problem/

Šahovski klub Petrinja, *Legenda: šah i zrno pšenice.* (Ogledano 22.12.2020). Dostopno na spletnem naslovu: http://www.sahklub-petrinja.hr/sah-i-zrno-psenice/

Teachingideas.co.uk, *How Many Squares on a Chessboard?* (Ogledano 28.2.2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://www.teachingideas.co.uk/problem-solving/how-many-squares-on-a-chessboard

Tiling a checkerboard. (2008) (Ogledano 27. 2. 2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://tinyurl.com/ka4x5skj

Vincetić, K., Brajković, D., Pilj, M. (2018). *Matematički zadatci na šahovskoj ploči.* V: Osiječki list 18, str. 81-103. (Ogledano 19. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://tinyurl.com/2pbrh94z

Wikipedia, *Knight's tour*. (Nazadnje posodobljeno 2021). (Ogledano 19. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour

Wikipedia, *Leonhard Euler.* (2020). (Ogledano 16.12.2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Wikipedia, *Matematična indukcija*. (2019). (Ogledano 15. 1. 2021). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Matemati%C4%8Dna_indukcija

Wikipedia, *Problem petih dam.* (2013). (Ogledano 20. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Problem_petih_dam

Wikipedia, *Problem števila zrn na šahovnici*. (2013). (Ogledano 4. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Problem_%C5%A1tevila_zrn_na_%C5%A1ahovnici

Wikipedia, *Skakačev obhod.* (2020). (Ogledano 9. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Skaka%C4%8Dev_obhod

Wikipedia, *Šahovske kategorije in naslovi*. (2017). (Ogledano 20. 12. 2020). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/%C5%A0ahovske_kategorije_in_naslovi