OSNOVNA ŠOLA I MURSKA SOBOTA

ŠTEFANA KOVAČA 32

9000 MURSKA SOBOTA

PRAVILNA TELESA

MATEMATIKA

Avtorja: Vito Lampe in Jaša Forjan

Mentor: dr. Slavko Buček

Murska Sobota, 2021

Povzetek

V raziskovalni nalogi je predstavljena tema lastnosti pravilnih teles, zgodovina poliedrov in njihove topološke lastnosti. Podan je opis vseh platonskih teles, splošnih formul za izračun stranic in polmerov, ki so potrebne za izračun površine in prostornine ter predstavitev Kepler-Poinsotovih poliedrov. Spoznamo tudi življenje in raziskovalne dosežke dveh pomembnih matematikov: Platona in Johannesa Keplerja, predvsem pa topološki in geometrijski dokaz, kot tudi opis vede topologije.

Abstract

The research paper presents the topic of properties of regular bodies, history of polyhedra and their topological properties. A description of all Platonic solids, general formulas for calculating the sides and radius required to calculate the area and volume, and a presentation of Kepler-Poinsot polyhedra is given. We also get to know the life and research achievements of two important mathematicians: Plato and Johannes Kepler, and above all the topological and geometric proof, as well as the description of the science of topology.

Kazalo vsebine

1 UVOD

Glavni cilji raziskovalne naloge so: predstavitev zgodovine poliedrov, opisati topološki dokaz in geometrijski dokaz, opis vseh platonskih teles in splošnih formul za izračun stranic in polmerov, ki so potrebne za izračun površine in prostornine ter predstavitev Kepler-Poinsotovih poliedrov.

V prvem delu raziskovalne naloge je podana zgodovina pravilnih poliedrov in kratek opis o življenju in delu Platona in Keplerja.

V drugem delu so podani podrobni opisi vseh platonskih teles, njihove lastnosti, poimenovanja, formule za izračun površine in prostornine teh teles. Podana sta pa tudi opisa dveh pomembnih dokazov, kot sta topološki dokaz in geometrijski dokaz. Zajeta je tudi predstavitev vede topologije.

Tretji del obravnava naloge obravnava Kepler-Poinsotove poliedre.

2 RAZLAGA POJMA DUAL

Dual oziroma dualni polieder [1] je v geometriji eden izmed para poliedrov, katerega oglišča enega odgovarjajo stranskim ploskvam drugega. Običajno se namesto izraza dualni uporablja izraz dual, ki ima isti pomen.

Dual poliedra z enakimi oglišči je enak poliedru z enakimi stranskimi ploskvami. Primer: polieder z enakimi robovi je enak drugemu z enakimi robovi. Tako so pravilni poliedri, kot so platonska telesa in Kepler-Poinsotovi poliedri v dualnih parih.

3 ZGODOVINA PRAVILNIH POLIEDROV

Najdeni so bili kamni izdelani pred približno 4000 leti nazaj [2], ki imajo oblike simetrije Platonskih poliedrov. Te kamne lahko najdemo v Ashmolean Museum v Oxford University. Kako so bili narejeni, nihče ne ve. V Italiji je bil najden kamen steatit v obliki dodekahedrona.

Največ odkritij je bilo podanih od Grkov [3]. Eden od njih je bil Platon, ki je odkril 5 svojih poliedrov, in sicer tetraeder, heksaeder, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. Pri tem je naštudiral, da je pravilni polieder telo, ki ima vse robove ter oglišča enake.

Komaj po 1700 let je Johannes Kepler odkril [4], da se lik pentagram lahko tudi uporablja v pravilnem poliedru, to so zvezdni poliedri. Nato je 200 let kasneje Louis Poinsot odkril verteksne figure v zvezdnih poliedrih, ter ugotovil da so vsi poliedri v dualih z drugimi.[5] Tu so bila odkrita Kepler-Poinsotova telesa.[6]

3.1 Platon

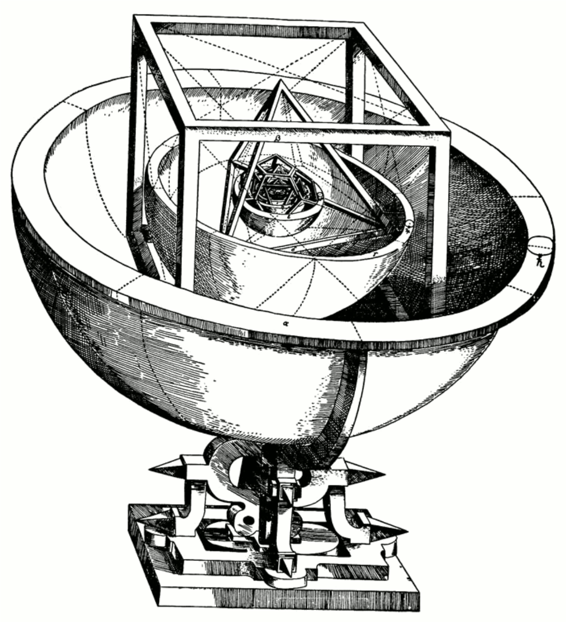
Slika 1: Platon

Platon je znan po njegovi filozofski smeri imenovani platonizem [7]. V filozofiji se uvršča v obdobje klasične grške filozofije. Rodil se je v aristokratski družini leta 427 pr. n. št. Poleg slikarstva je njegov najljubši predmet bila matematika, pri tem ga je učil tudi filozof Sokrat. S svojim prijateljem Anikeridom je v Atenah ustanovil Akademijo, v kateri je tudi dobil idejo Platonovih teles. Boga izenačuje s popolnim geometrijskim telesom. Teles je odkril 5, in sicer tetraeder, heksaeder, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. Vsako od teh teles je po njegovem mišljenju imelo specifičen pomen, in sicer tetraeder, ki predstavlja ogenj, heksaeder, ki predstavlja stabilno zemljo, oktaeder, ki predstavlja zrak, ikozaeder, ki predstavlja vodo in še dodekaeder, ki je predstavnik dvanajst zodiakalnih znamenj oz. horoskopov.

3.2 Johannes Kepler

Slika 2: Johannes Kepler

Johannes Kepler je bil nemški astronom, matematik in astrolog. Je ključna osebnost znanstvene revolucije iz 17 [8]. stoletja, najbolj znana po zakonih gibanja planetov. Proučeval je razmerja včrtanih krogov poliedrov, kar bi lahko bila geometrijska osnova vesolja. S selektivnim razvrščanjem pravilnih teles (oktaeder, ikozaeder, dodekaeder, tetraeder, kocka) je Kepler ugotovil, da je mogoče krogle postaviti v intervalih, ki ustrezajo relativnim velikostim poti vsakega planeta, ob predpostavki, da planeti krožijo okoli Sonca. Pozneje je zavrnil to formulo, ker ni bila dovolj natančna.



Slika 3: Keplerjev 3D model solarnega sistema s Platonskimi poliedri

4 PRAVILNA ALI PLATONSKA TELESA

Pravilna ali platonska telesa so poliedri, v katerem so vse mejne ploskve skladni pravilni mnogokotniki. Poznamo le pet pravilnih poliedrov, in sicer pravilni tetraeder (četverec) , pravilni heksaeder (šesterec, kocka) , pravilni oktaeder (osmerec) , pravilni dodekaeder (dvanajsterec) in pravilni ikozaeder (dvajseterec).[9] Imena so dobili glede na število svojih mejnih ploskev. Poleg platonskih teles pa poznamo tudi Kepler-Poinsotove, Johnsonove in Arhimedove poliedre, ki niso konveksni in tudi ne pravilni. Njihove mejne ploskve so večkotniki, robovi pa daljice.

	v	**e**	**f**	**p**	**q**
tetraeder	4	6	4	3	3
heksaeder	8	12	6	4	3
oktaeder	6	12	8	3	4
dodekaeder	20	30	12	5	3
ikozaeder	12	30	20	3	5

Tabela 1: Pravilna telesa (v – št. oglišč, e – št. robov, f – št. mejnih ploskev, p - št. oglišč na mejno ploskev, q – št robov, ki se stikajo v oglišču).

V tabeli 1 vidimo, da se količine P (površina), V (volumen), r (polmer včrtane krogle) in R (polmer očrtane krogle) povezane s p in q ter robom a. Takoj lahko najdemo povezavo med S (ploščina mejne ploskve), V in r. Pravilen polieder lahko razrežemo na f skladnih pravilnih piramid, ki imajo vrh v poliedrovem središču in za osnovno ploskev poliedrove mejne ploskve. Osnovna ploskev take piramide ima ploščino S in višino r. Zato je njena prostornina enaka

$$\frac{1}{3}\frac{Sr}{f} \tag{1}$$

in tako je prostornina celega telesa

$$V = \frac{1}{3}\frac{Sr}{f} \cdot f \tag{2}$$

Volumen pravilnega poliedra je potem

$$V = \frac{1}{3} Sr. \tag{3}$$

4.1 Dokazovanje platonskih teles

4.11 Geometrijski dokaz

Dokazal je Evklidov in je v njegovem delu Elementi. [10]

Gre pa takole. Vsako oglišče telesa mora delovati kot oglišče vsaj trem stranskim ploskvam.

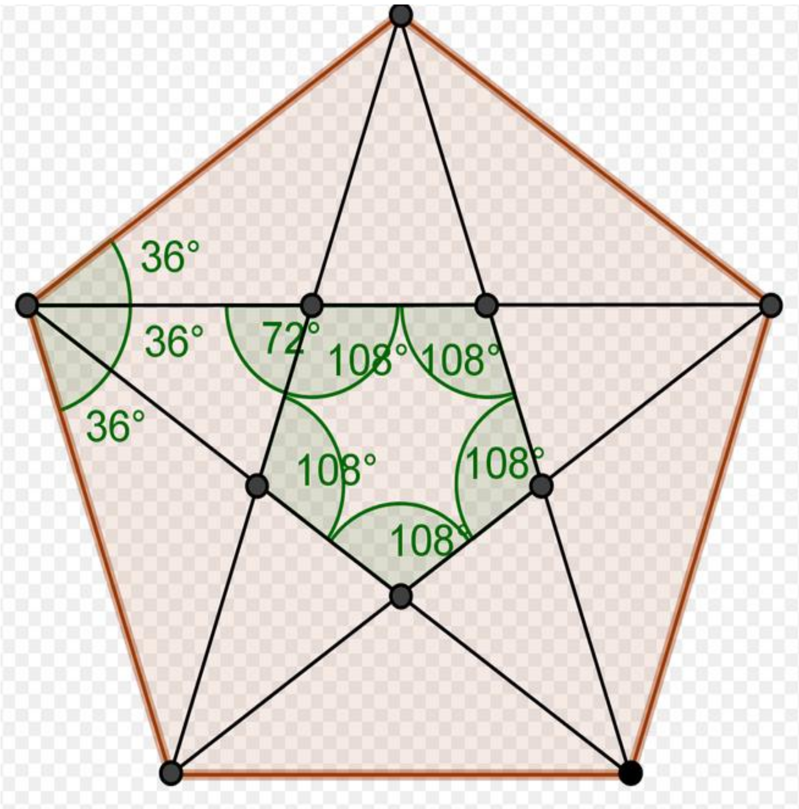
V vsakem oglišču telesa mora biti med sosednjimi stranskimi ploskvami vsota kotov med njihovimi ustreznimi sosednjimi ploskvami manj od 360°. Velikost, ki znaša manj kot 360° se imenuje kotni primanjkljaj.

Koti v vseh ogliščih vseh stranskih ploskvah platonskega telesa so enaki. Vsako oglišče vsake stranske ploskve mora prispevati manj kot $\frac{360^o}{3} = 120°$.

Pravilni mnogokotniki s šestimi ali več stranicami imajo kote le do 120° ali več, tako da mora biti skupna stranska ploskev kvadrat, enakostranični trikotnik ali petkotnik. Za te različne like velja naslednje. Stranske ploskve so enakostranični trikotniki in vsak kot enakostraničnega trikotnika meri 60°. V pravilnih telesih, kjer so mejne ploskve enakostranični trikotniki se stika v eni točki 3 (tetraeder), 4 (oktaeder) in 5 (ikozaeder) enakostraničnih trikotnikov.

Pri kocki so mejne ploskve kvadrati. Vsak kot meri 90°, in tako je s tremi stranskimi ploskvami v oglišču možna samo ena postavitev. Dobimo kocko.

V pravilnem petkotniku meri notranji kot 108°. S temi mejnimi ploskvami je možna samo ena postavitev. To je dodekaeder.



Slika 4: Koti petkotnika

4.2 Topologija

Topologíja je red čiste matematike oz. geometrije, ki pa obravnava samo tiste lastnosti množice, ki ohranjajo vsako obrnljivo, v obe smeri zvezno preoblikovanje te množice[11]. Takim lastnostim v matematiki rečemo topološke lastnosti. Če se dve množici preslikata ena v drugo, sta homeomorfni in sta s stališča topologije enaki. Topologija preučuje tudi topološki prostor in določa pomen razsežnosti.

Primera homeomorfnih množic sta kocka in krogla. Enako ne velja za kroglo in kocko, saj imata različne razsežnosti.

4.3 Topološki dokaz

Ključ za uporabo dokaza je Eulerjevo spoznanje, da velja $v - e + f = 2$, in dejstvo, da je $pf = 2e = qv$, kjer je p število robov vsake stranske ploskve in q število robov, ki se srečajo v vsakem oglišču. S kombinacijo naštetih dejstev in enačb izhaja enačba:

$$\frac{2e}{q} - e + \frac{2e}{p} = 2 \tag{4}$$

in iz tega

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}\,. \tag{5}$$

Ker je $e > 0$, velja

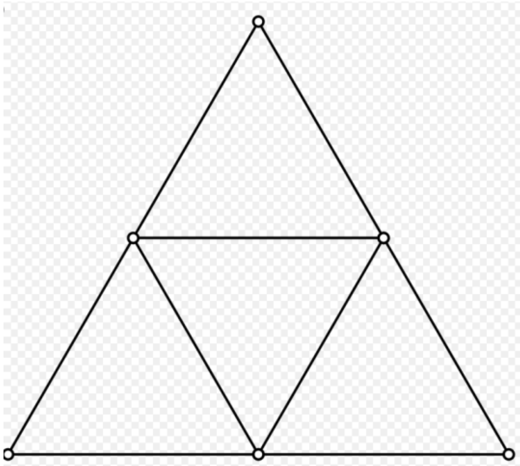
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Ker $p \geq 3$ in $q \geq 3$, se vidi, da obstaja le pet možnosti za (p, q), in sicer

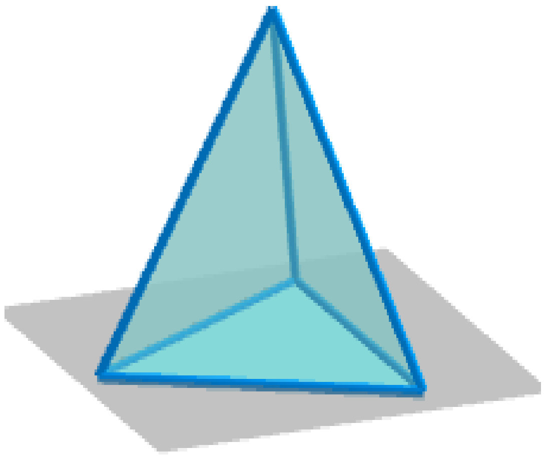
(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3) .

4.4 Pravilni tetraeder

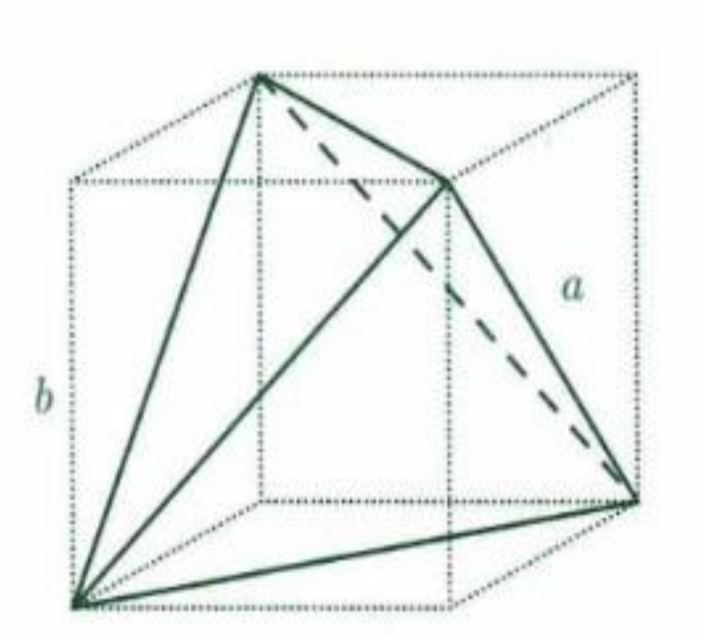
Najenostavnejši pravilni polieder je tetraeder, je konveksni, ki je sestavljen iz štirih enakostraničnih trikotnikov. V vsakem oglišču tetraedra se srečajo trije trikotniki. Tetraeder je poznan tudi kot tristrana piramida in enakoroba tristrana piramida.



Slika 5: Mreža pravilnega tetraedra



Slika 6: Telo pravilnega tetraedra



Slika 7: Kocki včrtani pravilni tetraeder v razmerju

Enačba za površino pravilnega tetraedra je

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}^{2}\sqrt{\mathbf{3}} \tag{6}$$

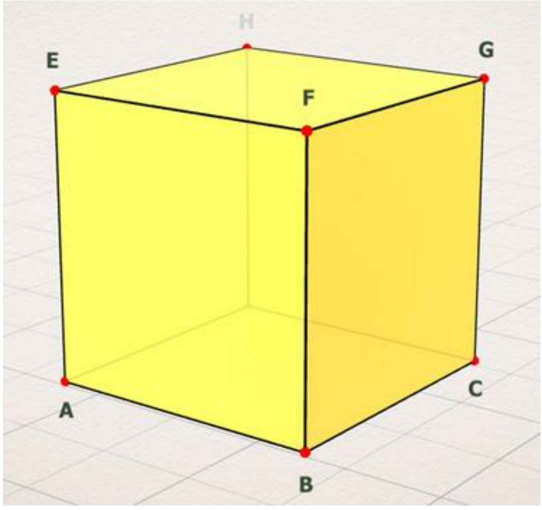
in za volumen

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{a}^{3}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}}\,. \tag{7}$$

Prostornino pravilnega tetraedra lahko dobimo tudi tako, da prostornini kocke z robom b odštejemo prostornine štirih piramid, ki imajo za osnovno ploskev polovico mejne ploskve kocke in za višino rob kocke.

4.5 Pravilni heksaeder

Kocko ali heksaeder omejuje 6 kvadratov. Kocka je eno od petih platonskih teles in je poseben primer prizme pravokotnega paralelepipeda. Kocka ima šest ploskev, od tod tudi še ime šesterec.



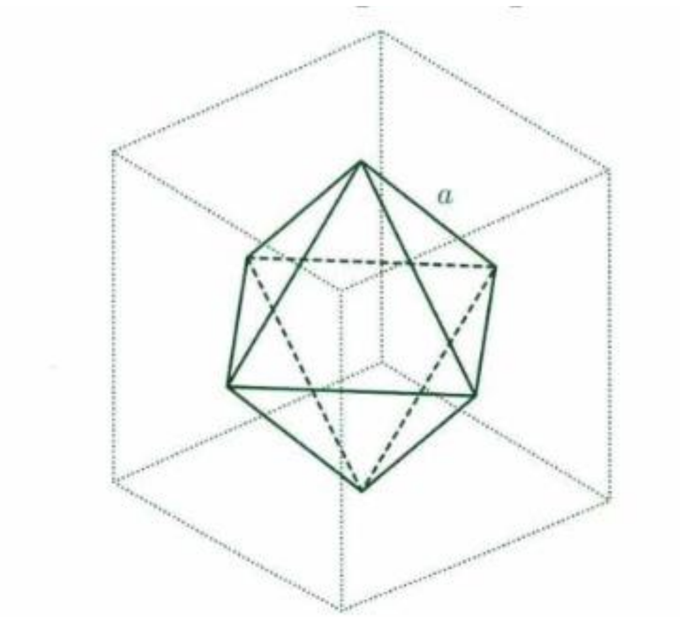
Slika 8: Telo heksaedra

Enačba za površino je

$$P = 6a^2 \tag{8}$$

in za prostornino

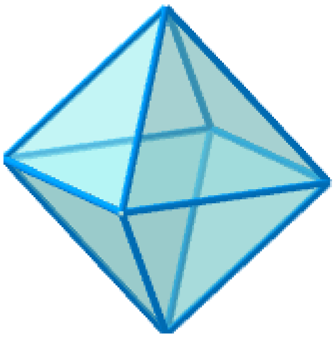
$$V = a^3. \tag{9}$$



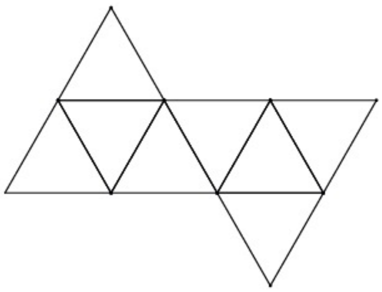
Slika 9: Kocka in pravilni oktaeder kot dualna poliedra.

4.6 Pravilni oktaeder

Oktaeder je konveksni polieder omejen z osmimi skladnimi enakostraničnimi trikotniki. Opišemo ga lahko tudi kot dvojno štiristrano piramido. Oktaeder ima osem ploskev in od todt izvira tudi ime osmerec. V vsakem oglišču se stikajo štirje robovi in štiri ploskve.



Slika 10: Telo pravilnega oktaedra



Slika 11: Mreža pravilnega oktaedra

Formula za površino je

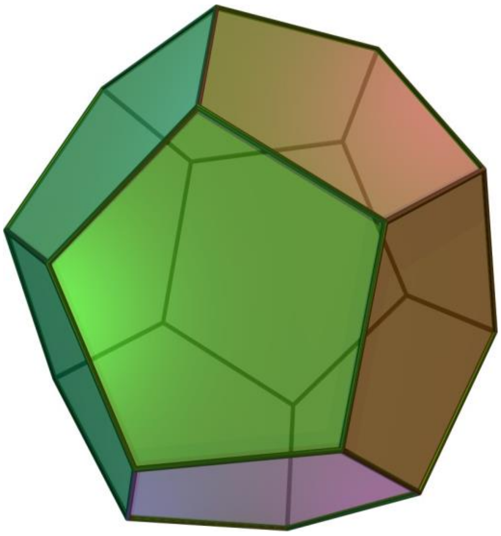
$$\boldsymbol{P = 2\sqrt{3}a^2} \tag{10}$$

in prostornino

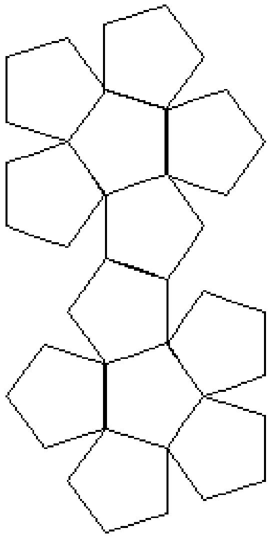
$$\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}\,. \tag{11}$$

4.7 Dodekaeder

Dodekaeder, je konveksni polieder, ki je omejen z dvanajstimi skladnimi pravilnimi petkotniki. [12]



Slika 12: Telo dodekaedra



Slika 13: Mreža dodekaedra

Enačba za površino je

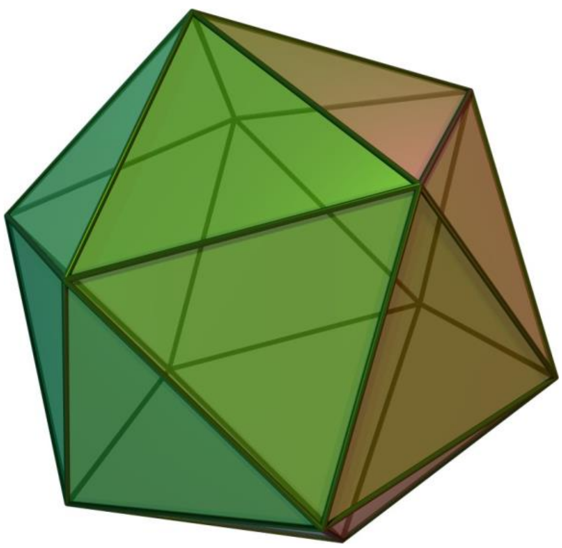
$$\boldsymbol{P = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}} \tag{12}$$

in prostornino

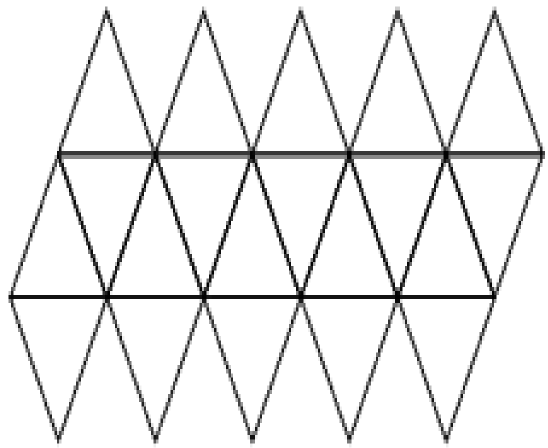
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right)a^3}. \tag{13}$$

4.8 Ikozaeder

Ikozaeder je konveksni polieder, ki je omejen z dvanajstimi skladnimi enakostraničnimi trikotniki. V vsakem oglišču ikozaedra se stika 5 robov in 5 ploskev. Ima 20 ploskev, od tod izvira ime dvajseterec.[13]



Slika 14:Telo ikozaedra



Slika 15:Mreža ikozaedra

Enačba za površino je

$$\boldsymbol{P = 5a^2\sqrt{3}} \tag{14}$$

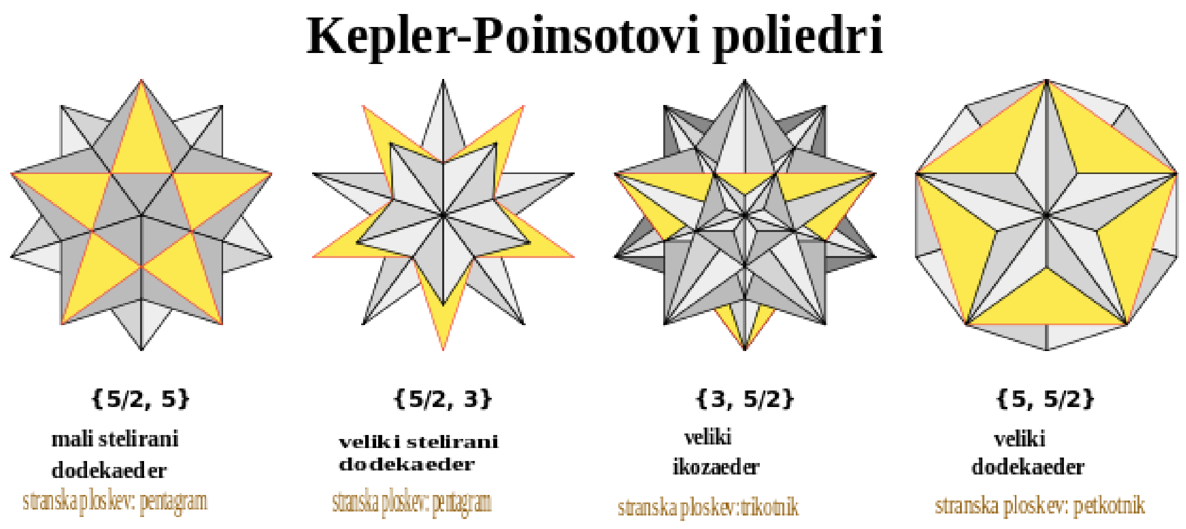
in volumen

$$\boldsymbol{V = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)a^3}. \tag{15}$$

5 KEPLER-POINSOTOVI POLIEDRI

Ti poliedri so združeni Keplerjevi poliedri ter Pointsotovi poliedri, saj gre za dualne pare. Keplerjev polieder je bil odkrit leta 1619 in ima osnovno ploskev lika pentagrama. [14] To pomeni, da ni konveksen. Poinsot pa je leta 1806 odkril še njuna duala, ki sta tudi nekonveksna. Značilnost Kepler-Poinsotovih poliedrov je tudi ikozaedrska simetrija.

Kepler-Poinsotov polieder je v matematiki in geometriji katerikoli od štirih pravilnih steliranih poliedrov. Dobimo jih z steliranjem pravilnih konveksnih dodekaedrov in ikozaedrov. Od teh se razlikujejo v tem, da imajo pentagramske stranske ploskve in oglišča.



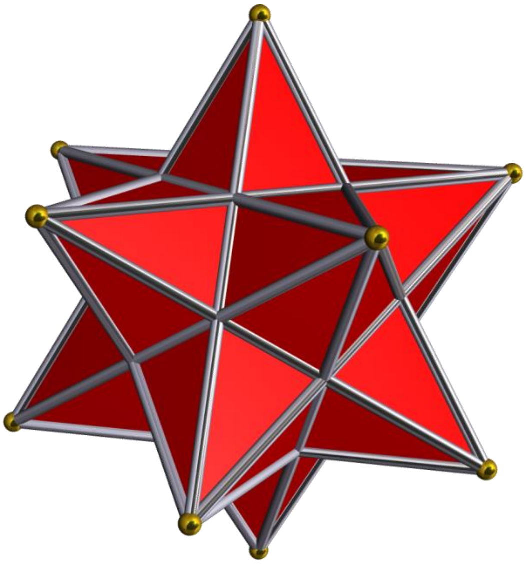
Slika 16: Prikaz Kepler-Poinsotovih poliedrov

Ti poliedri so združeni Keplerjevi poliedri ter Pointsotovi poliedri, saj gre za dualne pare. Keplerjev polieder je bil odkrit leta 1619. Za osnovno ploskev je imel pravilni petkotnik. Poinsot je leta 1806 odkril še njuna duala, ki sta tudi nekonveksna. Značilnost Kepler-Poinsotovih poliedrov je tudi ikozaedrska simetrija.

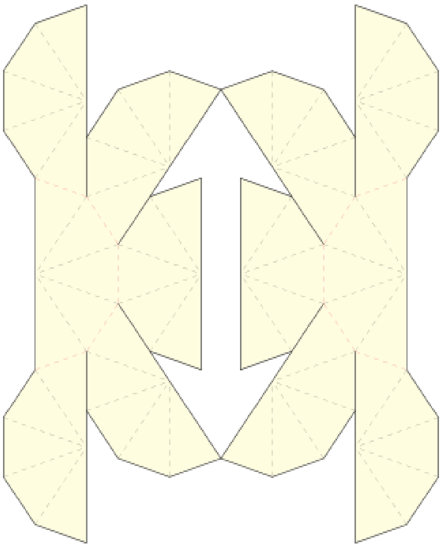
Kepler-Poinsotov polieder je v matematiki in geometriji katerikoli od štirih pravilnih steliranih poliedrov. Dobimo jih s steliranjem pravilnih konveksnih dodekaedrov in ikozaedrov. Od teh se razlikujejo v tem, da imajo pentagramske stranske ploskve in oglišča.

5.1 Mali zvezdni dodekaeder

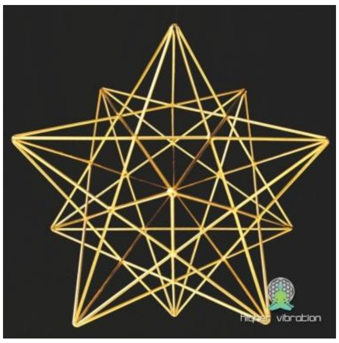
Znan tudi kot mali stelirani dodekaeder [15]. Je eden izmed štirh nekonveksnih pravilnih poliedrov. Sestavlja ga dvanajst pentagramskih stranskih ploskev, ki vsebujejo po pet pentagramov, ki se srečajo v vsakem oglišču. Njegov dual je veliki dodekaeder. Osnovna ploskev je pentagram.



Slika 17: Mali zvezdni dodekaeder



Slika 18: Mreža malega zvezdnega dodekaedra



Slika 19: Model enosti stelirnega dodekaedra

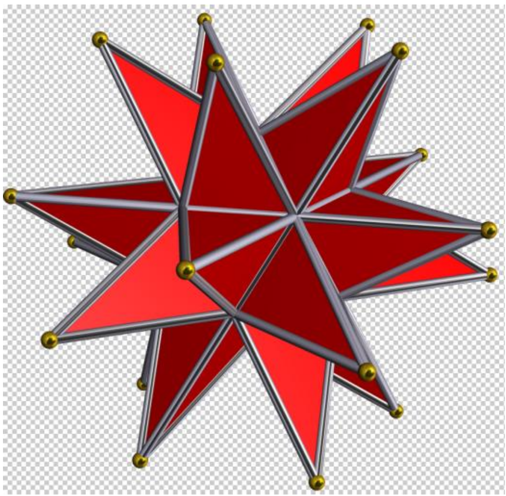
5.2 Veliki zvezdni dodekaeder

Veliki zvezni dodekaeder je Kepler-Poinsotov polieder. Je eden izmed štirih nekonveksnih pravilnih poliedrov [16]. Sestavljen je iz 12 pentagramskih stranskih ploskev, ki se medsebojno sekajo, kjer se trije pentagrami srečajo na vsakem oglišču.

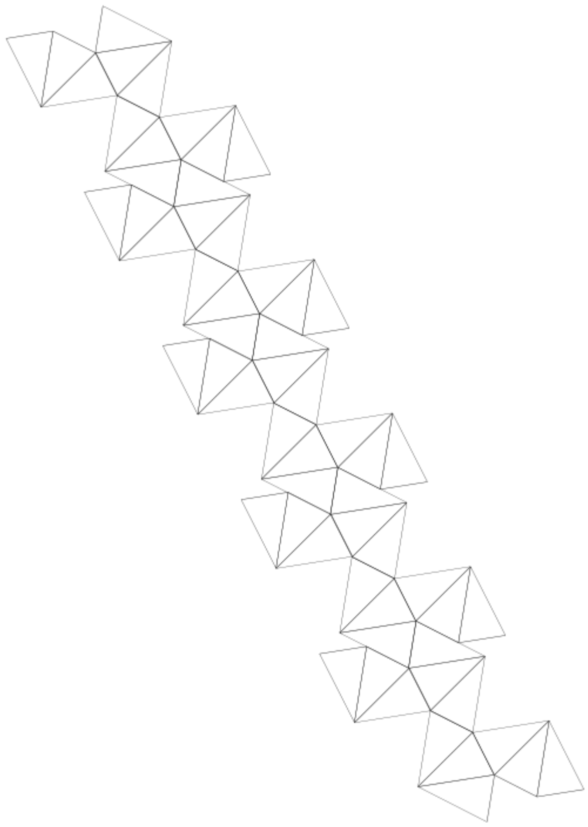
Ima isto razvrstitev oglišč je enaka pravilnemu dodekaedru tako, kot pr istelaciji dodekaedra. Njegov dual veliki ikozaeder, ki je na enak način podoben ikozaedru. Njegova osnovna ploskev pa pentagram.

Če so pentagramske stranske ploskve razbite na trikotnike, je topološko podoben triakisnemu ikozaedru z enako povezanimi stranskimi ploskvami, ki imajo višje enakokrake trikotnike.

Slika 20: Triasni ikozaeder



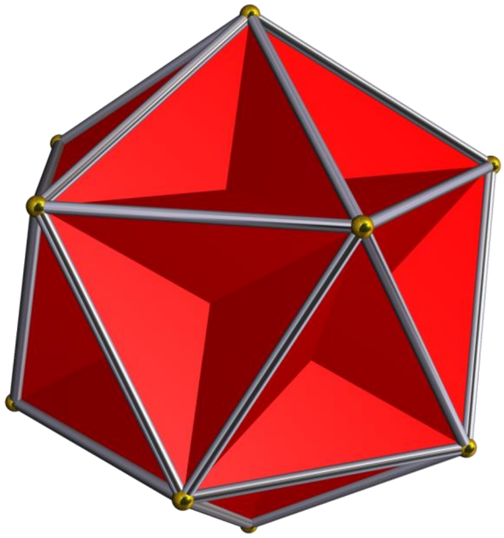
Slika 21: Veliki zvezdni dodekaeder

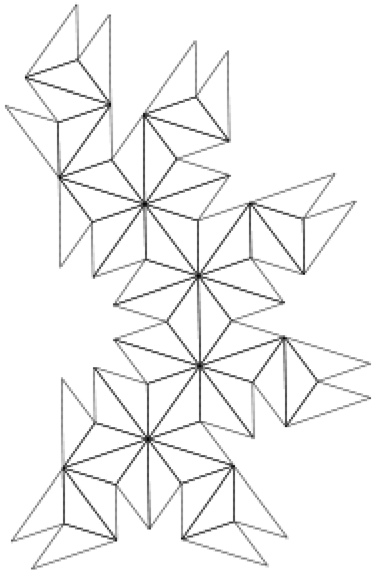


Slika 22: Mreža velikega zvezdnega dodekaedra

5.3 Veliki dodekaeder

Veliki dodekaeder je Kepler-Poinsotov polieder, je eden izmed štirih nekonveksnih pravilnih poliedrov [17]. Sestavljen je iz petkotnih stranskih ploskev oziroma iz šestih parov vzporednih petkotnikov. Pet petkotnikov se sreča v vsakem oglišču, kjer se sekajo in tvorijo pentagramsko pot.

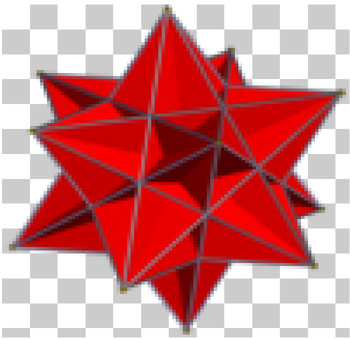


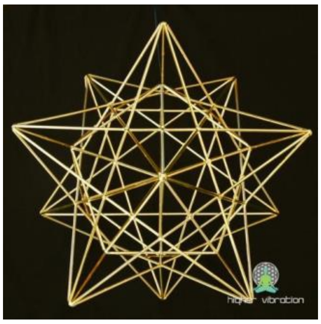


Slika 23: Veliki dodekaeder **Slika 24: Mreža velikega dodekaedra**

5.4 Veliki ikozaeder

Veliki ikozaeder (Znan tudi kot veliki dvajseterec) je eden izmed štirih Kepler-Poinsotovih poliedrov. Sestavljen je iz 20 medsebojno sekajočih se trikotnih stranskih ploskev [18, 19, 20]. Ima trikotnike, ki se v zaporedju srečajo v vsakem oglišču, kot pri pentagramu. Njegov dual je veliki stelirani dodekaeder. Njegova osnovna ploskev pa je trikotnik.





Slika 25: Veliki ikozaeder **Slika 26: Mreža enotnosti velikega ikozaedra**

6 ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo dokazovali pravilne poliedre. Pri tem smo uporabili dva dokaza.. Uporabili smo geometrijskega in ugotovili, kateri poliedri so pravilni in kateri niso. Najosnovnejših med 48 pravilnimi poliedri jih je natanko pet. To so Platonski poliedri, zapisani od starogrškega filozofa Platona. Opisali smo tudi 4 Kepler-Poinsovi poliedre.

LITERATURA

[1] https://sl.wikipedia.org/wiki/Pravilni_polieder (pridobljeno 31.3.2021)

[2] https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html

[3]]http://www.iep.utm.edu/plato/(pridobljeno31.3.2021)

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler (pridobljeno 12.5.2021)

[5] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poinsot/ (pridobljeno 12.5.2021)

[6]https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler-poinsot-info.html(pridobljeno 31.3.2021)

[7] https://hr.wikipedia.org/wiki/Platon (pridobljeno 21.5.2021)

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler (pridobljeno 12.5.2021)

https://www.britannica.com/biography/Johannes-Kepler (pridobljeno 12.5.2021)

[9]]https://encyclopediaofmath.org/wiki/Platonic_solids (pridobljeno 31.3.2021)

[10] https://sl.wikipedia.org/wiki/Evklid (pridobljeno 30.3.2021)

https://sl.warbletoncouncil.org/teorema-euclides-14200 (pridobljeno 30.3.2021)

https://sl.wikipedia.org/wiki/Platonsko_telo (pridobljeno 30.3.2021)

[11] https://hr.wikipedia.org/wiki/Topologija (pridobljeno 12.5.2021)

[12] https://sl.wikipedia.org/wiki/Dodekaeder (pridobljeno 12.5.2021)

https://platon-telesa.splet.arnes.si/te/dodekaeder-ali-dvanajsterec/ (pridobljeno 10.5.2021)

[13] https://sl.wikipedia.org/wiki/Ikozaeder (pridobljeno 12.5.2021)

http://platon-telesa.splet.arnes.si/te/ikozaeder-ali-dvajseterec/ (pridobljeno 12.5.2021)

[14] https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler-poinsot-info.html (pridobljeno 31.3.2021)

https://www.ams.org/journals/bull/2009-46-02/S0273-0979-09-01249-X/S0273-0979-09-01249-X.pdf (pridobljeno 31.3.2021)

]https://www.software3d.com/Kepler.php (pridobljeno 31.3.2021) (pridobljeno 31.3.2021)

https://mathworld.wolfram.com/Kepler-PoinsotSolid.html (pridobljeno 12.5.2021)

[15] https://sl.wikipedia.org/wiki/Mali_zvezdni_dodekaeder (pridobljeno 12.5.2021)

http://www.presek.si/28/1432-Domajnko.pdf (pridobljeno 12.5.2021)

[16] https://sl.wikipedia.org/wiki/Veliki_zvezdni_dodekaeder (pridobljeno 12.5.2021)

http://www.presek.si/28/1432-Domajnko.pdf (pridobljeno 12.5.2021)

[17] https://sl.wikipedia.org/wiki/Veliki_dodekaeder (pridobljeno 12.5.2021)

http://www.presek.si/28/1432-Domajnko.pdf (pridobljeno 12.5.2021)

[18] https://www.znanjesveta.com/o/Veliki_ikozaeder (pridobljeno 12.5.2021)

[19] https://sl.wikipedia.org/wiki/Veliki_ikozaeder (pridobljeno 12.5.2021)

[20] http://www.najdi.si/najdi/ikozaeder (pridobljeno 12.5.2021)