Osnovna šola Škofljica

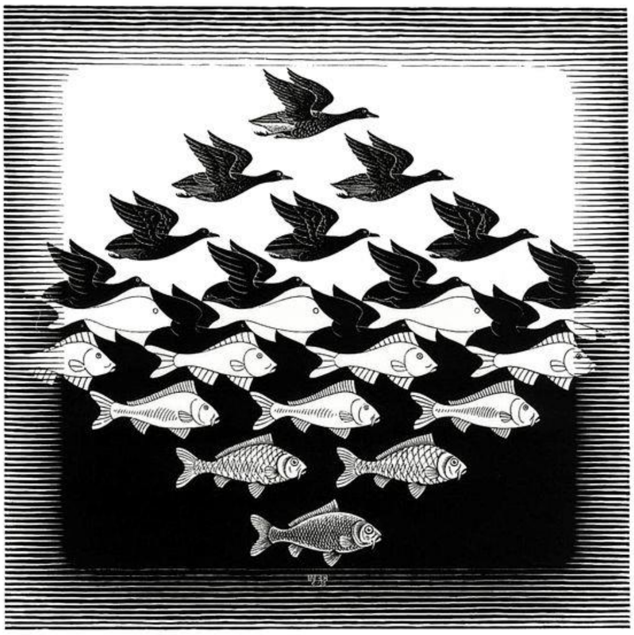
Klanec 5

1291 Škofljica

TLAKOVANJE V RAVNINI

Raziskovalna naloga

Področje: Matematika



Avtorica: Hana Perman, 9. A

Mentorica: Diana Kvartuh, prof.

Škofljica 2021

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem svoji mentorici Diani Kvartuh za vso pomoč pri sestavljanju raziskovalne naloge in ravnatelju, gospodu Romanu Brunšku za lektoriranje raziskovalne naloge. Hvala tudi komisiji na regijskem tekmovanju za nasvete.

Zahvaljujem se še mami za vse ideje in nasvete pri pripravi naloge.

Slika 1: M. C. Escher : Sky and water 1

KAZALO VSEBINE

SEZNAM SLIK

SEZNAM TABEL

SEZNAM PRILOG

POVZETEK

Znano je, da sta matematika in umetnost od nekdaj povezani. Ob tem se odpira bogata paleta vsebin, med katerimi me je najbolj pritegnilo tlakovanje ravnine.

Ker je tlakovanj s poljubnimi mnogokotniki nešteto, sem se v raziskovalni nalogi omejila na tlakovanja s pravilnimi mnogokotniki od roba do roba.

Za odkrivanje kombinacij mnogokotnikov, s katerimi bi lahko tlakovala, sem napisala programe v programskem jeziku Pascal. Vse kombinacije, ki jih vrne program, sem preverila z risanjem v programu Geogebra. Izkaže se, da vse niso ugodne – kombinacije mnogokotnikov ne morem položiti v ravnino, ne da bi prišlo do prekrivanja ali vrzeli. Ugotavljam tudi, da lahko nekatere ugodne kombinacije mnogokotnikov postavim v ravnino na različne načine, spet druge pa imajo enolično postavitev. Tovrstna, enolična tlakovanja, se imenujejo Arhimedova tlakovanja.

Sprašujem se, kako lahko Arhimedova tlakovanja z rotacijo, vzporednim premikom ali zrcaljenjem in njihovimi kombinacijami preslikam sama nase. Ugotovim, da imajo tovrstne preslikave matematično strukturo grupe.

Ključne besede: Tlakovanje od roba do roba, pravilni mnogokotniki, Arhimedovo tlakovanje, preslikave, grupa.

SUMMARY

It is known that mathematics and art have always been connected. A rich palette of contents opens up, among them, the foremost attraction, the paving of the plane. Since the pavings of the plane with arbitrary polygons are innumerable, I limit myself in my research to the paving of the plane with regular polygons. To discover all the existing combinations of polygons, I devised a program in the Pascal programming language. I enumerate all the combinations that the program returns and try to draw the corresponding pavings in the Geogebra program. It turns out that not all of them are feasible – in some cases it is impossible to pave the plane with polygons without overlappings or gaps. I also find that I can place some feasible combinations in the plane in different ways, and some special ones have a unique layout. This kind of unique paving is called an Archimedean paving. I explore how I can map an Archimedean paving on itself by rotation, parallel movement, reflection or their combinations. I find that these mappings form a group.

Keywords: Edge-to-edge paving, regular polygons, Archimedes paving, mappings, group.

1 UVOD

Od nekdaj sem poznala pojem tlakovanja kot fizično delo – polaganje tlakovcev. Kasneje sem se naučila, da v matematiki tlakovanje pomeni polaganje likov v ravnino. Odločila sem se, da raziščem tlakovanja s pravilnimi mnogokotniki od roba do roba.

Želela sem ugotoviti, kako pridem do kombinacij mnogokotnikov, s katerimi je mogoče tlakovati ravnino. Med raziskovanjem sem ugotovila, da se pri tlakovanju ravnine lahko omejim na tlakovanja reda 1, tako imenovana Arhimedova tlakovanja, in raziskala tudi slednja. Obstoj 11 Arhimedovih tlakovanj je prvi dokazal Johannes Kepler v svoji knjigi Harmonices Mundi (1619).

Kasneje sem ugotovila, da imajo Arhimedova tlakovanja veliko simetrij, zato sem želela raziskati, katere preslikave preslikajo posamično tlakovanje samo vase. Zanima me tudi ali lahko iz »osnovnih« preslikav, ki preslikajo dano tlakovanje vase, sestavim vsako preslikavo, ki preslika tlakovanje vase.

Ob pregledovanju literature na temo preslikav sem zasledila zame nov pojem – grupa. Končni cilj, ki sem si ga zadala, je ugotoviti ali ima množica preslikav, ki preslikajo posamična Arhimedova tlakovanja sama vase, lastnosti matematične strukture – grupe.

2 PRIMERI TLAKOVANJ

Tlakovanja so se pojavljala že v antičnih časih predvsem v dekorativne namene. Umetnost tlakovanja lahko občudujemo še danes v različnih zvrsteh umetnosti in arhitekture. Najdemo jih na rimskih mozaikih, gotskih stropovih, raznih ornamentih, skulpturah ter v heraldiki.

Slika 2: Primera tlakovanja v umetnosti.

Levo-M.C. Escher: Horseman. Desno-palača Topkapi-Istanbul

Eden bolj znanih umetnikov je M. C. Escher, ki je z grafikami prikazal različna zanimiva tlakovanja. Tlakovanja lahko zasledimo tudi v naravi. Lep primer slednjega je satovje.

Slika 3: Primeri tlakovanj v naravi. Od leve proti desni: močvirski tulipan, satovje, ribje luske.

3 OSNOVNI POJMI

»**Mnogokotnik** je ravninski geometrijski lik, ki ga oklepa enostavna sklenjena lomljenka.«
(https://sl.wikipedia.org/wiki/Mnogokotnik)

»**Pravilni mnogokotnik** je mnogokotnik, ki ima vse stranice enako dolge in vse kote med seboj skladne.«
(https://sl.wikipedia.org/wiki/Pravilni_mnogokotnik)

Tlakovanje (pokritje) ravnine je mozaična razporeditev geometrijskih likov (tlakovcev) na ravnini tako, da liki pokrivajo celotno ravnino (brez prekrivanja in vrzeli).

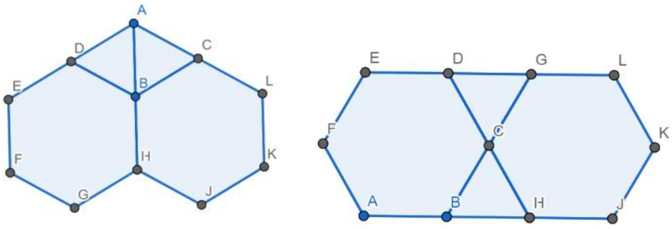
Mreža je kombinacija točk razporejenih v ravnini. Mrežo tvorijo oglišča mnogokotnikov v tlakovanju.

Slika 4: Tlakovanje ravnine

4 TLAKOVANJE

Ker je tlakovanj z mnogokotniki neskončno, sem se omejila na tlakovanje s pravilnimi mnogokotniki od roba do roba.

Naj bo **vozlišče tlakovanja** točka, ki je skupna trem ali več tlakovcem. Za raziskovanje sem definirala tudi **tip vozlišča** oblike $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$, kjer predstavljajo $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ mnogokotnike, ki so razporejeni okoli vozlišča tlakovanja, pri čemer je k_1 najmanjši mnogokotnik, $k_2, k_3, \dots k_n$ pa se nadaljujejo v pozitivni ali negativni smeri (glej *Sliko 6*). Mnogokotniki so napisani od najmanjšega proti največjemu. Če to ni mogoče, so popisani tako da je na koncu vedno napisan največji mnogokotnik tlakovanja.



Slika 5: Levo - Tlakovanje (3, 3, 6, 6), desno - Tlakovanje (3, 6, 3, 6)

Okoli vozlišča lahko postavim različne mnogokotnike in različno število mnogokotnikov. Vsota notranjih kotov mnogokotnikov okoli vozlišča tlakovanja mora biti enaka $360°$.

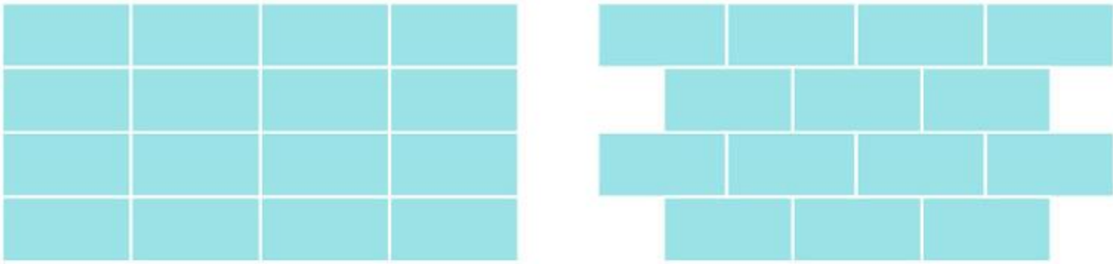
Ker ne obstaja pravilen mnogokotnik s kotom večjim ali enakim $180°$, je najmanjše število mnogokotnikov v vozlišču tlakovanja 3. Ker je trikotnik mnogokotnik z najmanj oglišči, je največje število mnogokotnikov v vozlišču 6.

Vse možne kombinacije s tremi, štirimi in petimi liki sem preverila s pomočjo programa Pascal. Vse programske kode, ki sem jih sestavila sama, so dodane v prilogi.

V programu sem uporabila formulo za izračun enega notranjega kota pravilnega mnogokotnika:

$$\alpha = \frac{(\mathrm{n} - 2) \cdot 180°}{\mathrm{n}}.$$

Tlakovanje z mnogokotniki je **od roba do roba**, če je vsako vozlišče oglišče vsakega tlakovca, v katerem leži to vozlišče (glej *Sliko 6*).



Slika 6: Levo - Tlakovanje od roba do roba. Desno - Tlakovanje, ki ni od roba do roba

4.1. Tlakovanje (k_1, k_2, k_3)

V programu Pascal sem definirala tri celoštevilske spremenljivke $k_1,\ k_{2,}\ k_3$.
Vsota notranjih kotov k_1-kotnika, $k_{2,}$-kotnika in k_3-kotnika, ki se stikajo v vozlišču, mora biti enaka $360°$.

$$\frac{(k_1-2)\cdot 180°}{k_1}+\frac{(k_2-2)\cdot 180°}{k_2}+\frac{(k_3-2)\cdot 180°}{k_3}=360°$$

$$k_1\,k_2(\,k_3-2)+\ k_1\,k_3(\,k_2-2)+\ k_2\,k_3(\,k_1-2)=2\,k_1\,k_2\,k_3$$

$$k_1\,k_2\,k_3-2(k_1\,k_2+k_1\,k_3+k_2\,k_3)=0 \qquad (1)$$

Enačbo (1) sem uporabila v programu kot pogoj za iskanje trojic. Določila sem zgornjo in spodnjo mejo za število kotov mnogokotnikov. Spodnja meja je tri. Zgornjo mejo sem ocenila po naslednjem premisleku:
naj bodo $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}$ in α_{k_3} notranji koti mnogokotnikov, pri čemer naj bo α_{k_3} največji možen in $\alpha_{k_1} \leq \alpha_{k_2} \leq \alpha_{k_3}$. Iz tega sledi, da mora biti vsota $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}$ najmanjša možna in hkrati strogo večja od $180°$, saj mora biti k_3-kotnik konveksen. Torej velja:

$$\frac{(k_1-2)\cdot 180°}{k_1}+\frac{(k_2-2)\cdot 180°}{k_2}>180°$$

$$2(k_1+k_2)<k_1\cdot k_2.$$

Ker mora biti vsota $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}$ najmanjša možna, s poskušanjem poiščem najmanjši k_2:

- $k_1\ =\ 3$

$$2\cdot 3+2\cdot k_2<3\cdot k_2$$

$$k_2>6$$

Najmanjši k_2, ki ustreza temu pogoju in pogojema $k_2\ \geq\ k_1$ in $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}>180°$, je $k_2=7$.

S kombinacijo $k_1 = 3$ in $k_2 = 7$ dobim vsoto notranjih kotov:

$$\frac{(3-2)\cdot 180°}{3}+\frac{(7-2)\cdot 180°}{7}=188,\overline{571428}°.$$

- $k_1 = 4$

$$2\cdot 4+2\cdot k_2<4\cdot k_2$$

$$k_2>2$$

Najmanjši k_2, ki ustreza temu pogoju in pogojema $k_2 \geq k_1$ in $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}>180°$, je $k_2 = 5$.

S kombinacijo $k_1 = 4$ in $k_2 = 5$ dobim vsoto notranjih kotov:

$$\frac{(4-2)\cdot 180°}{4}+\frac{(5-2)\cdot 180°}{5}=198°,$$

kar je več kot pri kombinaciji $k_1 = 3$ in $k_2 = 7$.

- $k_1 \geq 5$

Pri vseh kombinacijah vsota $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}$ presega vsoto notranjih kotov pri $k_1 = 4$ in $k_2 = 5$.

Torej je pravilna kombinacija $k_1 = 3$ in $k_2 = 7$, zato ima k_3-kotnik notranji kot največ

$$360°-188,\overline{571428}°=171,\overline{428572}°.$$

Torej je k_3-kotnik:

$$\frac{(k_3-2)\cdot 180°}{k_3}=171,\overline{428572}°$$

$$8,\overline{571428}°\cdot k_3=360°$$

$$k_3=42.$$

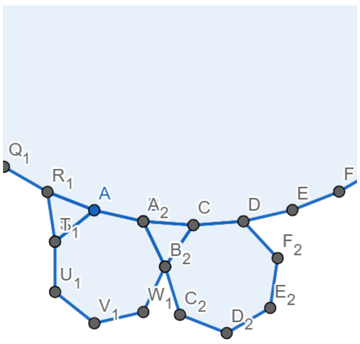
Torej je zgornja meja 42.

Program vrne naslednje kombinacije (glej *Prilogo 1*):

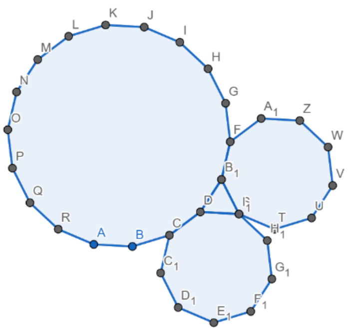
- $(3, 7, 42)$,
- $(3, 8, 24)$,
- $(3, 9, 18)$,
- $(3, 10, 15)$,
- $(3, 12, 12)$,
- $(4, 5, 20)$,
- $(4, 6, 12)$,
- $(4, 8, 8)$,
- $(5, 5, 10)$,
- $(6, 6, 6)$.

Vse kombinacije sem preverila s programom Geogebra in prišla do naslednjih ugotovitev.

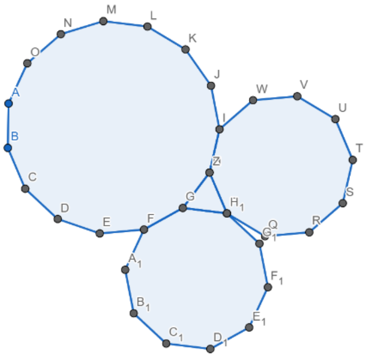
S tlakovanji $(3, 7, 42), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (5, 5, 10)$ se ravnine ne da tlakovati, saj v enem izmed vozlišč tlakovanja nastane vrzel, ki je ne morem tlakovati z nobenim izmed treh mnogokotnikov (glej *Slike 7, 8, 9, 10*).
S kombinacijama $(3, 8, 24)$ in $(4, 5, 20)$ se ravnine ne da tlakovati, saj se mnogokotniki prekrivajo (glej *Sliki 11, 12*).
S kombinacijami $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$ in $(6, 6, 6)$ se ravnino da tlakovati, saj nikjer ne pride do prekrivanja ali vrzeli (glej *Slike 13, 14, 15, 16*).



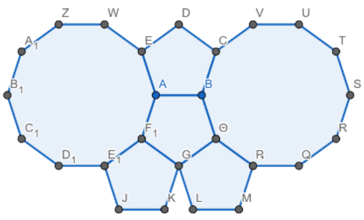
Slika 7: Tlakovanje (3, 7, 42)



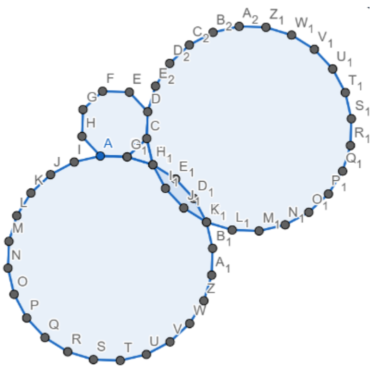
Slika 8: Tlakovanje (3, 9, 18)



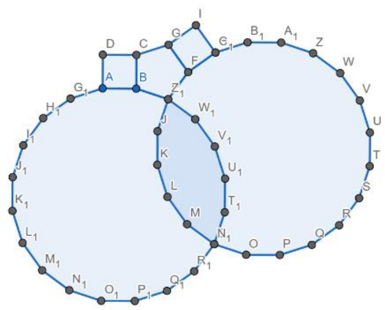
Slika 9: Tlakovanje (3, 10, 15)



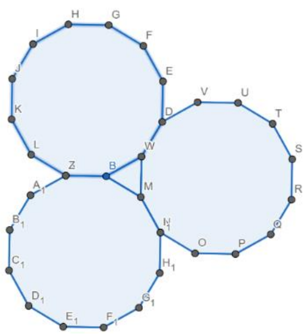
Slika 10: Tlakovanje (5, 5, 10)



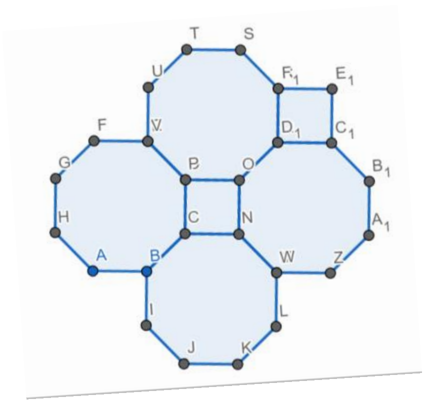
Slika 11: Tlakovanje (3, 8, 24)



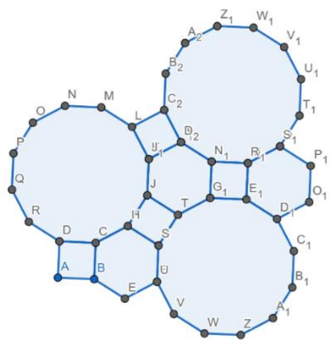
Slika 12: Tlakovanje (4, 5,20)



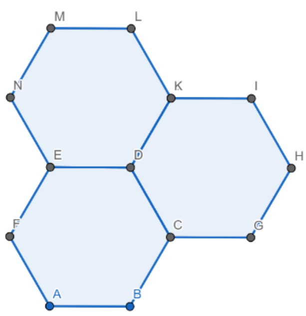
Slika 13: Tlakovanje (3, 12, 12)



Slika 14: Tlakovanje (4, 8, 8)



Slika 15: Tlakovanje (4, 6, 12)



Slika 16: Tlakovanje (6, 6, 6)

4.2. Tlakovanje (k_1, k_2, k_3, k_4)

V programu Pascal sem definirala štiri celoštevilske spremenljivke $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$.

Vsota notranjih kotov k_1-kotnika, k_2-kotnika, k_3-kotnika in k_4-kotnika, ki se stikajo v vozlišču, mora biti enaka $360°$.

$$\frac{(k_1-2)\cdot 180°}{k_1}+\frac{(k_2-2)\cdot 180°}{k_2}+\frac{(k_3-2)\cdot 180°}{k_3}+\frac{(k_4-2)\cdot 180°}{k_4}=360°$$

$$k_1k_2k_3(k_4-2)+k_1k_2k_4(k_3-2)+k_1k_3k_4(k_2-2)+k_2k_3k_4(k_1-2)=2k_1k_2k_3k_4$$

$$2k_1k_2k_3k_4-2(k_1k_2k_3+k_1k_3k_4+k_1k_2k_4+k_2k_3k_4)=0 \qquad (2)$$

Enačbo (2) sem uporabila v programu kot pogoj za iskanje kombinacij štirih likov.
Določila sem zgornjo in spodnjo mejo za število kotov mnogokotnikov. Spodnja meja je tri. Zgornjo mejo sem ocenila po naslednjem premisleku:
Naj bodo $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}$ in α_{k_4} notranji koti večkotnika, pri čemer naj bo α_{k_4} največji možen in $\alpha_{k_1} \leq \alpha_{k_2} \leq \alpha_{k_3} \leq \alpha_{k_4}$. Iz tega sledi, da mora biti vsota $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}+\alpha_{k_3}$ najmanjša možna in hkrati večja od $180°$, saj mora biti k_4-kotnik konveksen.

Ker je v primeru treh trikotnikov vsota kotov enaka $180°$, moram en trikotnik nadomestiti s kvadratom. Pridem do rešitve $k_1=3, k_2=3, k_3=4$. Vsota njihovih notranjih kotov je:

$$2\cdot\frac{(3-2)\cdot 180°}{3}+\frac{(4-2)\cdot 180°}{4}=210°,$$

kar pomeni, da ima k_4-kotnik notranji kot največ:

$$360°-210°=150°.$$

Poglejmo, kateri mnogokotnik ima notranji kot enak $150°$

$$\frac{(k_4-2)\cdot 180°}{k_4}=150°$$

$$30°\cdot k_4=360°$$

$$k_4=12.$$

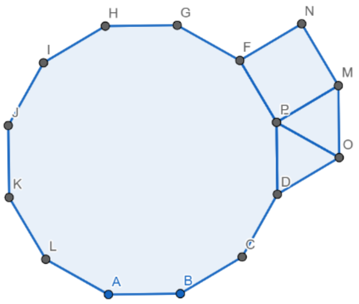
Torej je zgornja meja 12.

Program vrne naslednje kombinacije (glej *Prilogo 2*):

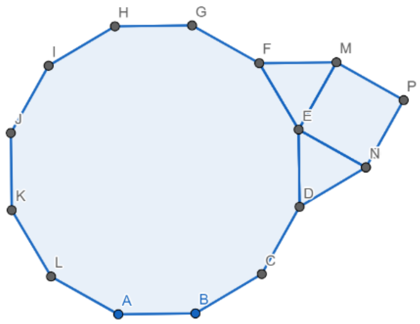
- $(3,3,4,12)$,
- $(3,3,6,6)$,
- $(3,4,4,6)$,
- $(4,4,4,4)$.

Z dobljenimi kombinacijami se da tlakovati na več kot samo en način, ker so zaporedja mnogokotnikov okoli vozlišča tlakovanja lahko različna. Zato poleg kombinacij, ki jih je vrnil program, obstajajo še kombinacije $(3,4,3,12)$, $(3,6,3,6)$ in $(4,3,4,6)$.
Vse kombinacije sem preverila s programom Geogebra in prišla do naslednje ugotovitve:

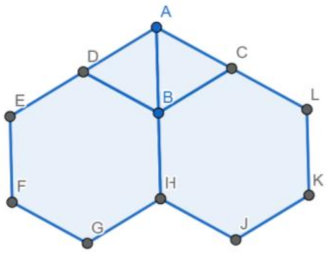
Z vsemi kombinacijami se da tlakovati, saj nikjer ne pride do prekrivanja in vrzeli (glej *Slike 17 – 23*).



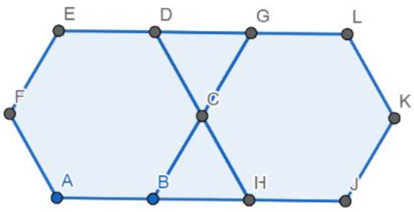
Slika 17: Tlakovanje (3, 3, 4, 12)



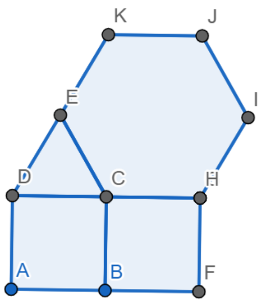
Slika 18: Tlakovanje (3, 4, 3, 12)



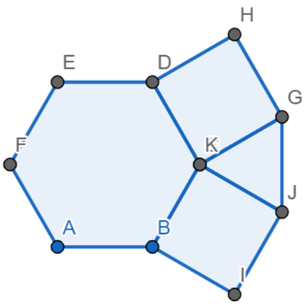
Slika 19: Tlakovanje (3, 3, 6, 6)



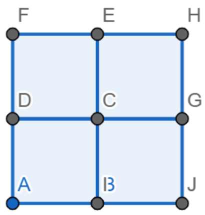
Slika 20: Tlakovanje (3, 6, 3, 6)



Slika 21: Tlakovanje (3, 4, 4, 6)



Slika 22: Tlakovanje (3, 4, 6, 4)



Slika 23: Tlakovanje (4, 4, 4, 4)

4.3. Tlakovanje $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$

V programu Pascal sem definirala pet celoštevilskih spremenljivk k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Vsota notranjih kotov k_1-kotnika, k_2-kotnika, k_3-kotnika, k_4-kotnika in k_5-kotnika, ki se stikajo v vozlišču, mora biti enaka $360°$.

$$\frac{(k_1-2)\cdot 180°}{k_1}+\frac{(k_2-2)\cdot 180°}{k_2}+\frac{(k_3-2)\cdot 180°}{k_3}+\frac{(k_4-2)\cdot 180°}{k_4}+\frac{(k_5-2)\cdot 180°}{5}=$$
$$=360°$$
$$k_1k_2k_3k_4(k_5-2)+k_1k_2k_3k_5(k_4-2)+k_1k_2k_4k_5(k_3-2)+k_1k_3k_4k_5(k_2-2)$$
$$+k_2k_3k_4k_5(k_1-2)=2k_1k_2k_3k_4k_5$$
$$2k_1k_2k_3k_4k_5-2(k_1k_2k_3k_4+k_1k_2k_3k_5+k_1k_2k_4k_5+k_1k_3k_4k_5+k_2k_3k_4k_5)=0$$

Enačbo (3) sem uporabila v programu kot pogoj za iskanje kombinacij petih likov. Določila sem zgornjo in spodnjo mejo za število kotov mnogokotnikov. Spodnja meja je tri. Zgornjo mejo sem ocenila po podobnem premisleku kot pri ocenjevanju zgornje meje s kombinacijami treh in štirih mnogokotnikov.
Naj bodo $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \alpha_{k_4}$ in α_{k_5} notranji koti večkotnika, pri čemer naj bo α_{k_5} največji možen in $\alpha_{k_1} \leq \alpha_{k_2} \leq \alpha_{k_3} \leq \alpha_{k_4} \leq \alpha_{k_5}$. Iz tega sledi, da mora biti vsota $\alpha_{k_1}+\alpha_{k_2}+\alpha_{k_3}+\alpha_{k_4}$ najmanjša možna in hkrati večja od $180°$, saj mora biti k_5-kotnik konveksen.

Očitno je, da so to štirje trikotniki. Vsota njihovih notranjih kotov je:

$$4\cdot\frac{(3-2)\cdot 180°}{3}=240°,$$

zato ima k_5-kotnik notranji kot največ:

$$360°-240°=120°.$$

To je notranji kot k_5-kotnika:

$$\frac{(k^5-2)\cdot 180°}{k^5}=120°$$
$$60°\cdot k^5=360°$$
$$k^5=6.$$

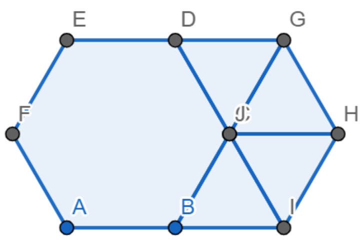
Torej je zgornja meja 6-kotnik.

Dobila sem naslednji kombinaciji (glej *Prilogo 3*):

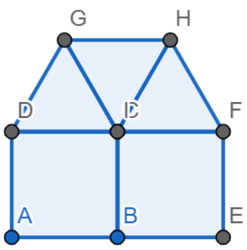
- $(3, 3, 3, 3, 6)$,
- $(3, 3, 3, 4, 4)$.

Z dobljenimi kombinacijami se da tlakovati na več kot samo en način. Ker so zaporedja mnogokotnikov okoli vozlišča lahko različna, obstaja poleg kombinacij, ki mi jih je vrnil program, še kombinacija $(3, 3, 4, 3, 3)$.
Vse kombinacije sem preverila s programom Geogebra in prišla do naslednje ugotovitve:

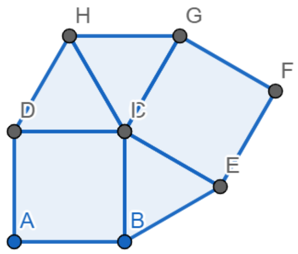
S kombinacijami $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ in $(3, 3, 4, 3, 4)$ se da tlakovati, saj nikjer ne pride do prekrivanj ali vrzeli (glej *Slike 24, 25, 26*).



Slika 24: Tlakovanje (3, 3, 3, 3, 6)



Slika 25: Tlakovanje (3, 3, 3, 4, 4)



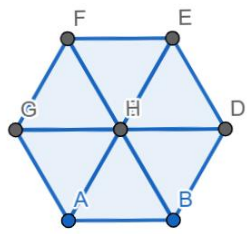
Slika 26: Tlakovanje (3, 3, 4, 3, 4)

4.4. Tlakovanje $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$

Mnogokotnik z najmanj koti je trikotnik, z velikostjo notranjega kota $60°$.

$$360° : 60° = 6$$

Torej je največje možno število mnogokotnikov v vozlišču tlakovanja šest (trikotnikov). To je tudi edino možno takšno tlakovanje (glej *Sliko 27*).



Slika 27: Tlakovanje (3, 3, 3, 3, 3, 3)

5 ARHIMEDOVA TLAKOVANJA

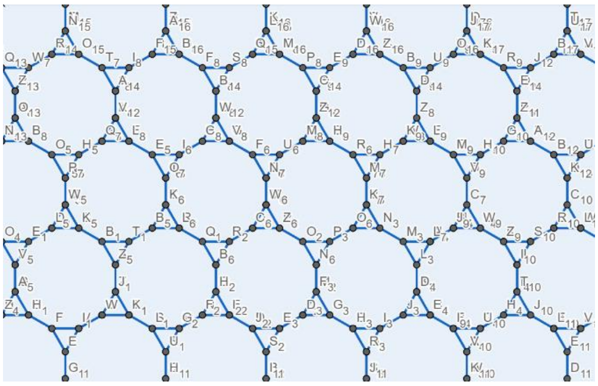
Ob zgornjih ugotovitvah sem opazila, da imajo nekatera tlakovanja v vsakem vozlišču enako razporeditev mnogokotnikov, čeprav z nasprotno orientacijo (npr. tlakovanje $(4, 6, 12)$, kjer so v nekaterih vozliščih mnogokotniki, urejeni po velikosti, orientirani pozitivno in v drugih negativno), spet druga tlakovanja pa imajo različne razporeditve. Med brskanjem po literaturi sem spoznala, da so tlakovanja, ki imajo v vsakem vozlišču enako razporeditev mnogokotnikov, **reda 1** in jim pravimo **Arhimedova tlakovanja**. (Grunbaum, Shephard 1977, str. 232)

Arhimedova tlakovanja imajo tudi podmnožico monoedrskih tlakovanj. Monoedrsko tlakovanje je tlakovanje sestavljeno iz samih enakih mnogokotnikov.
(Riosa 2016, str. 11)
Monoedrska tlakovanja so tri Arhimedova tlakovanja (tlakovanje $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4)$ in $(6, 6, 6)$.

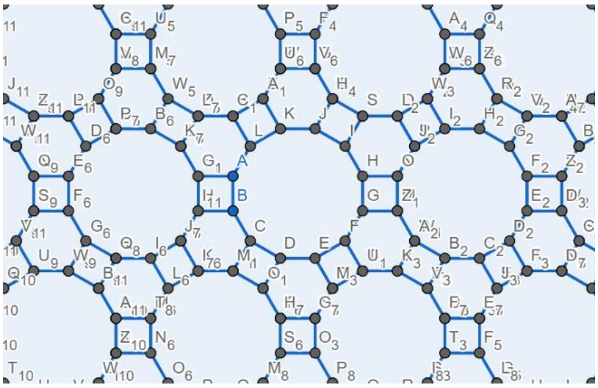
Preverila sem, katera izmed tlakovanj, ki sem jih našla s pomočjo Pascala in Geogebre, so Arhimedova tlakovanja (glej *Slike 28 – 38*). Ta so:

- $(3, 12, 12)$,
- $(3, 4, 12)$,
- $(4, 8, 8)$,
- $(6, 6, 6)$,
- $(3, 6, 3, 6)$,
- $(3, 4, 3, 6)$,
- $(4, 4, 4, 4)$,
- $(3, 3, 3, 3, 6)$,
- $(3, 3, 3, 4, 4)$,
- $(3, 4, 3, 4, 3)$,
- $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

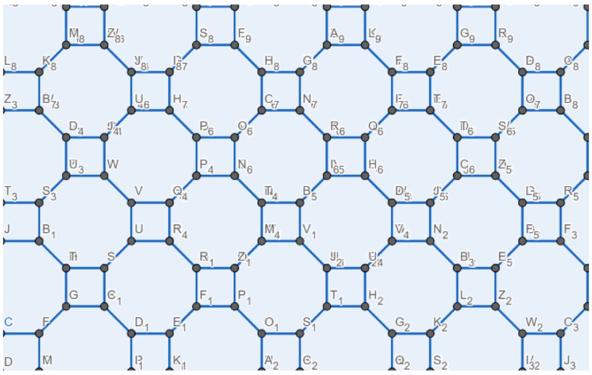
Opomba: Predstavitev nekaterih tlakovanj je več, saj so lahko tlakovanja predstavljena zrcalno kakor so na sliki.



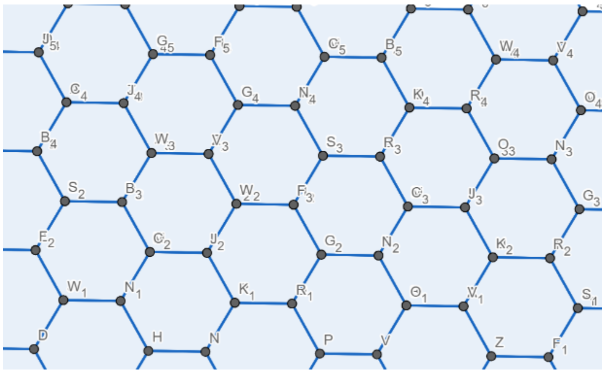
Slika 28: Arhimedovo tlakovanje (3, 12, 12)



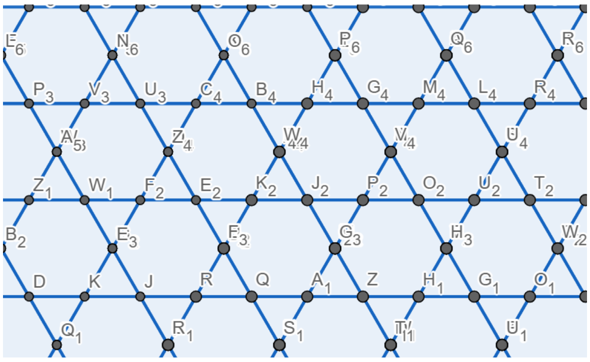
Slika 29: Arhimedovo tlakovanje (4, 6, 12)



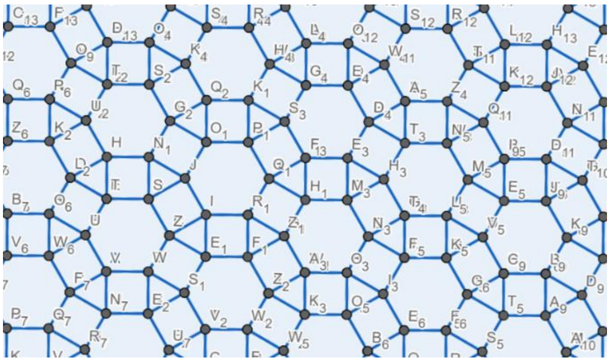
Slika 30: Arhimedovo tlakovanje (4, 8, 8)



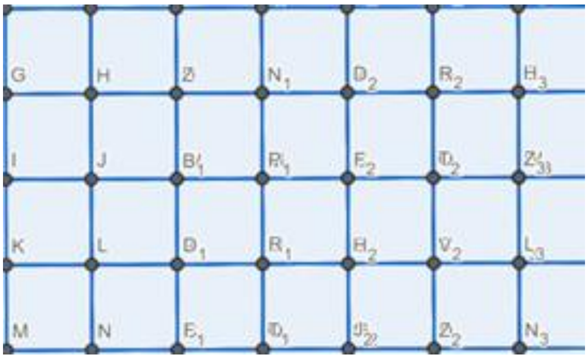
Slika 31: Arhimedovo tlakovanje (6, 6, 6)



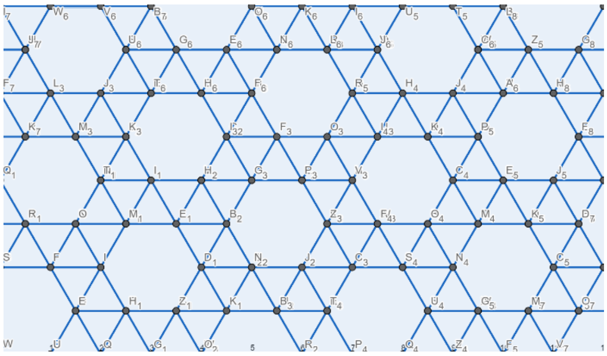
Slika 32: Arhimedovo tlakovanje (3, 6, 3, 6)



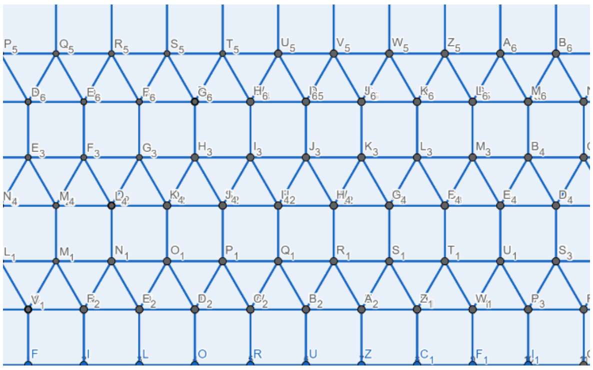
Slika 33: Arhimedovo tlakovanje (3, 4, 6, 4)



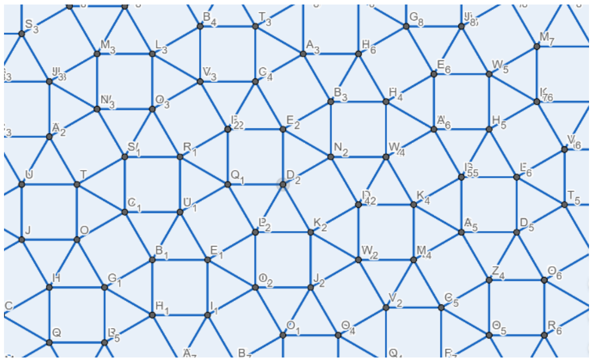
Slika 34: Arhimedovo tlakovanje (4, 4, 4, 4)



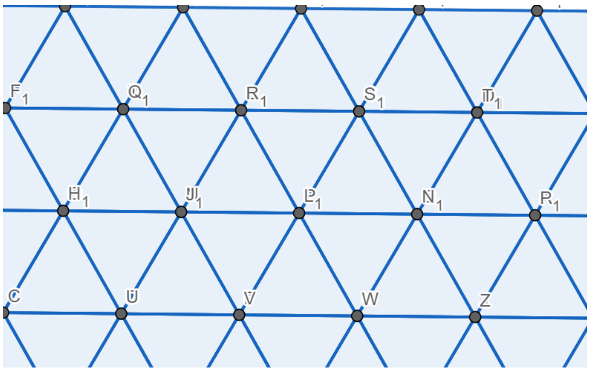
Slika 35: Arhimedovo tlakovanje (3, 3, 3, 3, 6)



Slika 36: Arhimedovo tlakovanje (3, 3, 3, 4, 4)



Slika 37: Arhimedovo tlakovanje (3, 3, 4, 3, 4)



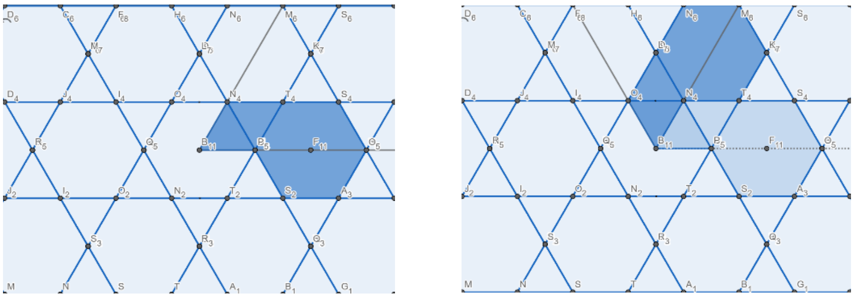
Slika 38: Arhimedovo tlakovanje (3, 3, 3, 3, 3, 3)

6 PRESLIKAVE

6.1. Opis preslikav

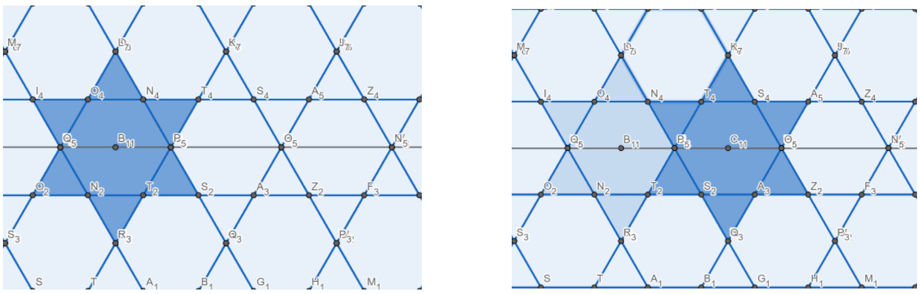
V tem poglavju se bom ukvarjala samo s preslikavami, ki ohranjajo kote in razdalje. To so samo rotacije ali zasuki, premiki ali translacije in zrcaljenja. Poleg vseh naštetih preslikav pa še vse preslikave sestavljene iz naštetih preslikav. V poglavju 6.2 bom sestavila tabele preslikav za vsako tlakovanje posebej in v poglavju 6.3 povedala več o sestavljanju le teh.

1. **Rotacija** ali **zasuk** $R(\alpha)$ je preslikava, kjer točko (x, y) zasukamo za kot α v pozitivni smeri (tj. v nasprotni smeri urinega kazalca) okoli koordinatnega izhodišča. Rotacija za $180°$ je enaka zrcaljenju čez izhodišče. Če lahko mrežo zarotiram vase za kot α, jo lahko rotiram tudi za vse kote $n \cdot \alpha$, pri čemer je $n \in \mathbb{N}_0$. V tabelah zato zapišem samo rotacijo $R(\alpha)$.



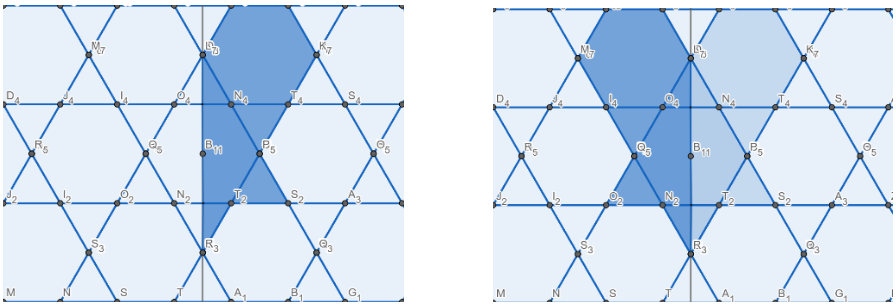
Slika 39: Od leve proti desni: Pred in po rotaciji

2. **Vzporedni premik** ali **translacija** v desno za enoto $e > 0$ je preslikava D ravnine nase, ki je dana s predpisom $D(x, y) = (x + e, y)$. Vzporedni premik ali translacija v levo L, je dana s predpisom $L(x, y) = (x - e, y)$.
   Naj oznaka $T(\alpha, e)$ pomeni vzporedni premik za enoto e vzporedno s premico pod kotom $\alpha < 180°$. Preslikava D je tako enaka $T(0°, e)$. Z oznako $T(0°, -e)$ označim preslikavo L. Vzporedni premik za enoto v desno vzporedno s premico pod kotom $\alpha < 180°$ dobim iz rotacije $R(\alpha)$ in vzporednega premika D na naslednji način: premico, vzdolž katere opravljam vzporedni premik, rotiram za kot $-\alpha$, tako da se poravna z osjo x ,opravim premik D in jo rotiram za kot α, tako da se vrne na svoje prvotno mesto.
   Oznaka $T(\alpha, -e)$ pomeni vzporedni premik v levo vzporedno s premico, pod kotom $\alpha < 180°$, torej premik v nasprotno smer kot $T(\alpha, e)$. Vse premike vzporedno pod kotom α lahko torej zapišem kot $T(\alpha, k \cdot e)$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.
   V tabelah pomeni $T(n \cdot \alpha, e)$ vzporedni premik v desno, vzporedno z vsemi premicami, ki so večkratniki kota α, za enoto e. Ker vem, da lahko naredim vzporedni premik za enoto e enkrat, ga lahko tudi k-krat, če je $k \in \mathbb{Z}$, zato lahko oznako k v tabelah izpustim. Vem tudi, da obstaja vzporedni premik za $k \cdot e$, iz česar sledi, da obstaja tudi vzporedni premik $k \cdot (-e)$.



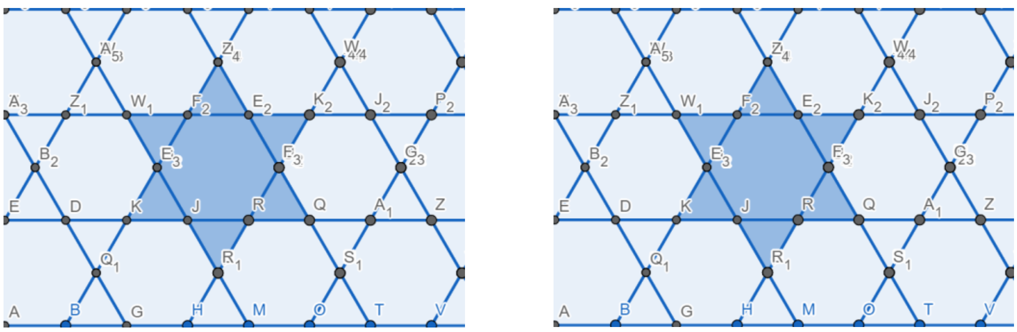
Slika 40: Od leve proti desni: pred in po translaciji

3. **Zrcaljenje preko premice** (osi x) je preslikava Z, dana s predpisom $(x, y) = (x, -y)$. $Z(n \cdot \alpha)$ pomeni zrcaljenje čez premico pod kotom $n \cdot \alpha$, pri $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \cdot n < 180°$. Zrcaljenje preko premice pod kotom α dobim iz rotacije $R(\alpha)$ in zrcaljenja Z na naslednji način: ravnino rotiram za kot $-\alpha$, tako da se os zrcaljenja poravna z osjo x, opravim zrcaljenje Z in jo rotiram za kot α, tako da se vrne nazaj na svoje prvotno mesto. V tabelah pomeni $Z(n \cdot \alpha)$ zrcaljenje čez vse premice pod koti, ki so večkratniki kota α.



Slika 41: Od leve proti desni: pred in po zrcaljenju

4. **Preslikava identiteta** je preslikava, dana s predpisom $Id(x, y) = (x, y)$. Preslikava identiteta preslika vsako točko mreže samo nase.



Slika 42: Od leve proti desni: pred in po preslikavi id

6.2. Preslikave Arhimedovih tlakovanj

V tem poglavju sem raziskala, kako lahko Arhimedova tlakovanja preslikam sama vase s preslikavami, ki ohranjajo kote razdalje v ravnini.

Za vsako od Arhimedovih tlakovanj sem sestavila tabelo preslikav na način, ki je opisan spodaj. Preslikave v tabeli imenujem **osnovne preslikave.**

Za vsako tlakovanje sem izbrala fiksno vozlišče V in mnogokotnike $V_1, \dots, V_k, k = 3, 4, 5, 6$, okoli njega. V tabelah navedena izhodišča predstavljajo točko $(0, 0)$ v koordinatnem sistemu. Vse premice, preko katerih lahko zrcalim in vzporedno s katerimi lahko mrežo premaknem, potekajo skozi izhodišče. Koti premic preslikav in zrcaljenj (α) so na sliki določeni glede na os x, ki je poravnana s spodnjim robom slike. Dovolj je, da za izhodišča vzamem po eno središče vseh različnih mnogokotnikov okoli danega vozlišča v tlakovanju. Pri monoedrskih tlakovanjih lahko za izhodišče vzamem tudi vozlišče samo. Pri skoraj vseh ostalih je to odveč, saj le pri redkih izmed njih obstaja rotacija okoli vozlišča, ki ni rotacija za $360°$. Vse premice, vzporedno s katerimi lahko vzporedno premikam in preko katerih lahko zrcalim, potekajo tudi skozi središča mnogokotnikov.

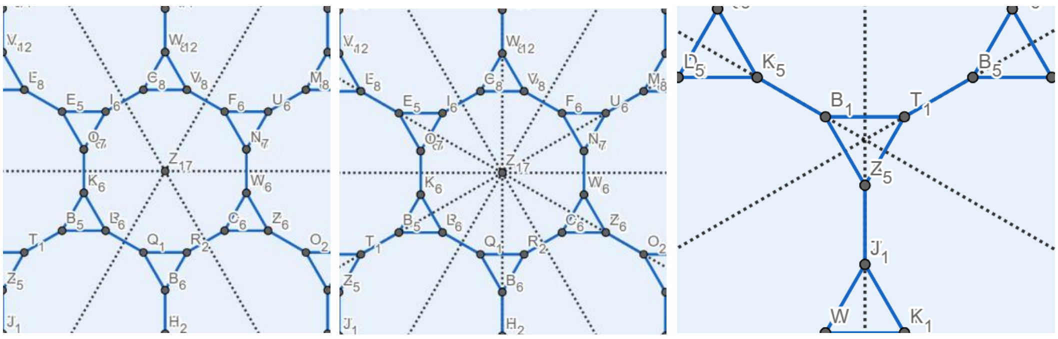
Kasneje bom dokazala, da lahko iz preslikav, navedenih v tabelah, sestavim vse preslikave, ki preslikajo dano Arhimedovo tlakovanje nase.

Na spodnjih slikah so prikazane osi, s katerimi lahko vzporedno premikam tlakovanje in osi, čez katere lahko zrcalim. Vzporedni premik ima za posamezno tlakovanje le eno sliko, saj v posameznem tlakovanju vedno poteka vzporedno z istimi premicami, ne glede na izhodišče. Rotacije niso ilustrirane.

Tlakovanje $(3, 12, 12)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 12-kotnika	$R(60°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 30°)$
2. središče 3-kotnika	$R(120°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(30° + n \cdot 60°)$

Tabela 1

e je razdalja med središčema dveh najbližjih 12-kotnikov.



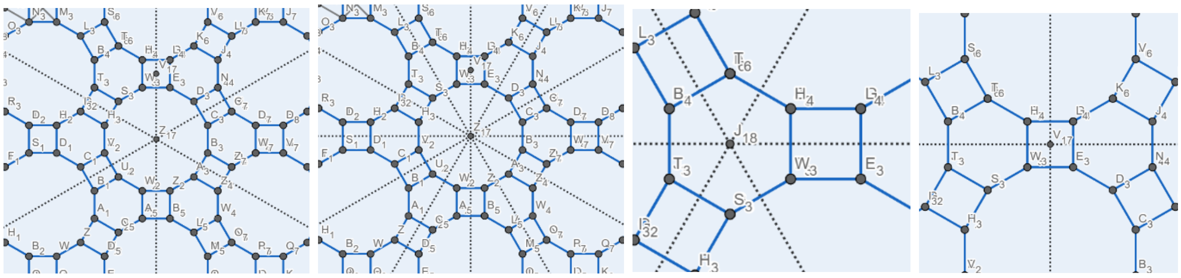
Slika 43: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(4, 6, 12)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 12-kotnika	$R(60°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 30°)$
2. središče 6-kotnika	$R(120°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(30 + n \cdot 60°)$
3. središče kvadrata	$R(180°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 90°)$

Tabela 2

e je razdalja med središčema dveh najbližjih 12-kotnikov.

Izbrani kvadrat ima stranice poravnane koordinatnim osem.

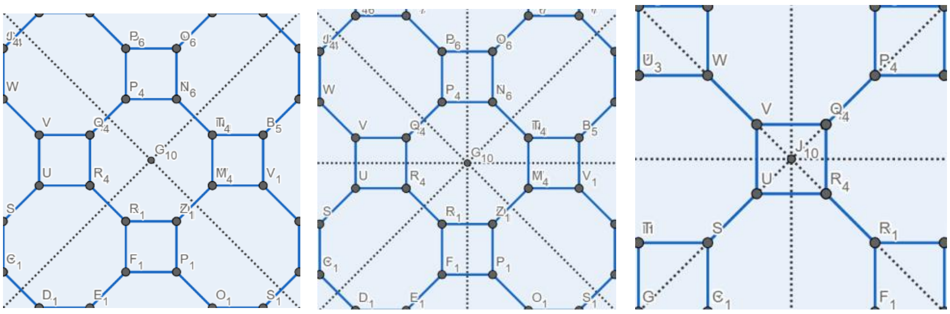


Slika 44: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje, 3. zrcaljenje

Tlakovanje $(4,8,8)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 8-kotnika	$R(90°)$	$T(45°(1+2n), e)$	$Z(n \cdot 45°)$
2. središče 4-kotnika	$R(90°)$	$T(45°(1+2n), e)$	$Z(n \cdot 45°)$

Tabela 3

e je razdalja med središčema dveh najbližjih 8-kotnikov.

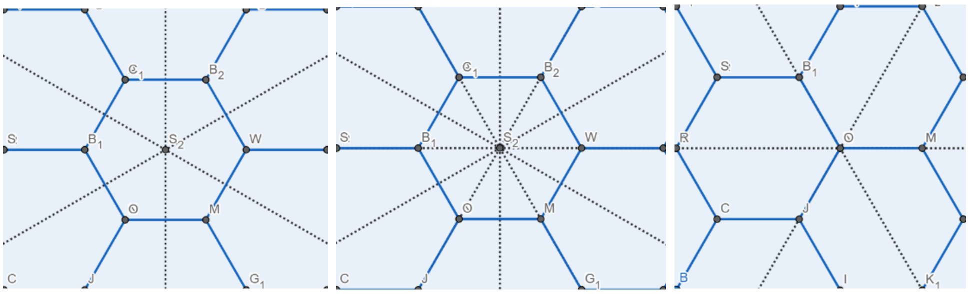


Slika 45: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(6,6,6)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 6-kotnika	$R(60°)$	$T(30° + n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 30°)$
2. vozlišče	$R(120°)$	$T(30° + n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 60°)$

Tabela 4

e je razdalja med središčema dveh najbližjih 6-kotnikov, ki si delita stranico.

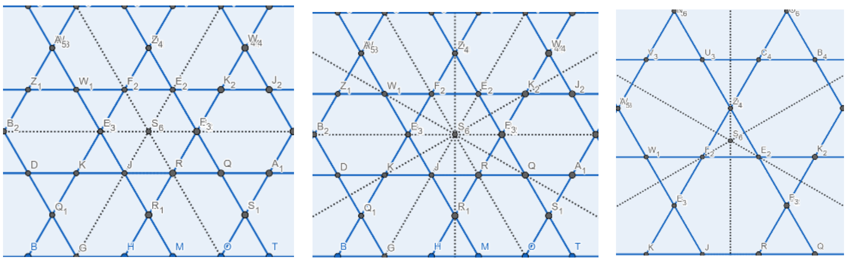


Slika 46: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(3, 6, 3, 6)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 6-kotnika	$R(60°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 30°)$
2. središče trikotnika	$R(120°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(30° + n \cdot 60°)$

Tabela 5

e je razdalja med središčema dveh najbližjih 6-kotnikov.



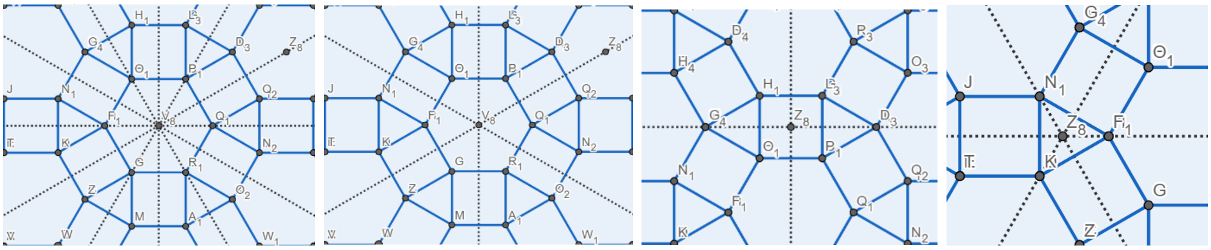
Slika 47: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(4, 3, 4, 6)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 6-kotnika	$R(60°)$	$T(30° + n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 30°)$
2. središče kvadrata	$R(180°)$	$T(30° + n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 90°)$
3. središče trikotnika	$R(120°)$	$T(30° + n \cdot 60°, e)$	$Z(60° + n \cdot 120°)$

Tabela 6

e je razdalja med središčema dveh najbližjih 6-kotnikov.

Izbrani kvadrat ima stranice poravnane s koordinatnima osema.

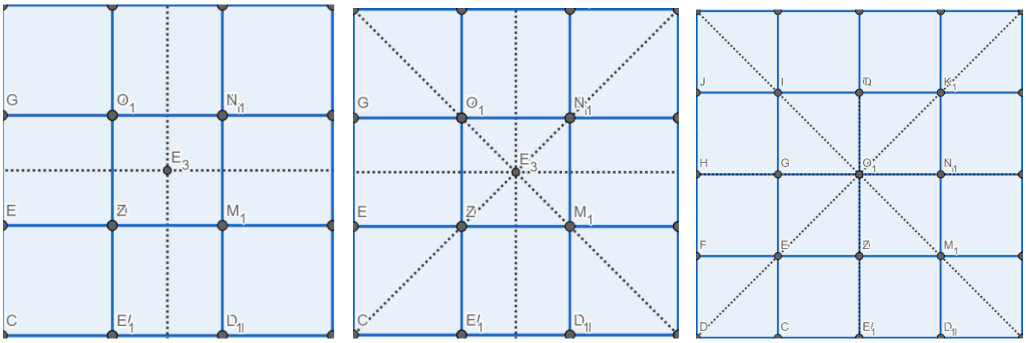


Slika 48: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje, 3. zrcaljenje

Tlakovanje $(4,4,4,4)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče kvadrata	$R(90°)$	$T(n \cdot 90°, e)$	$Z(n \cdot 45°)$
2. vozlišče	$R(90°)$	$T(n \cdot 90°, e)$	$Z(n \cdot 45°)$

Tabela 7

e je razdalja med središčema dveh kvadratov in je enaka stranici kvadrata.

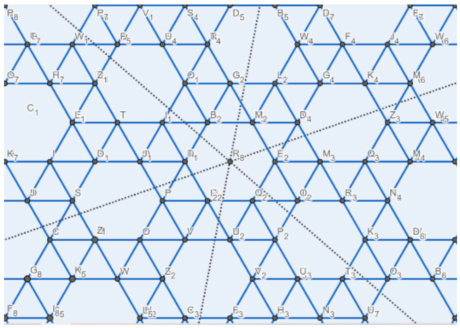


Slika 49: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(3,3,3,3,6)$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče 6-kotnika	$R(60°)$	$T(19° + n \cdot 60°, e)$	ni zrcaljenj
2. središče trikotnika	$R(120°)$	$T(19° + n \cdot 60°, e)$	ni zrcaljenj

Tabela 8

e je razdalja med središčema dveh 6-kotnikov. Izbrani trikotnik si stranice deli samo s trikotniki.



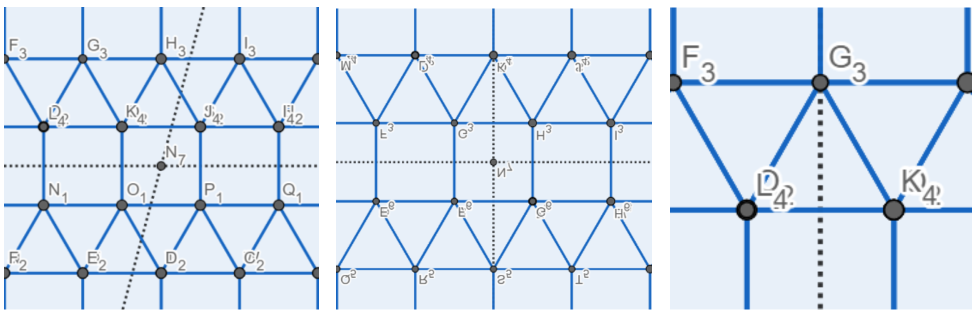
Slika 50: Translacija

Tlakovanje $(\mathbf{3,3,3,4,4})$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče kvadrata	$R(180°)$	$T(0°, e), T(75°, f)$	čez os x in y
2. središče trikotnika	ni rotacij	$T(0°, e), T(75°, f)$	čez os y

Tabela 9

e je razdalja med središčema dveh sosednjih kvadratov

f je razdalja med središčema najbližjih kvadratov iz sosednjih pasov.

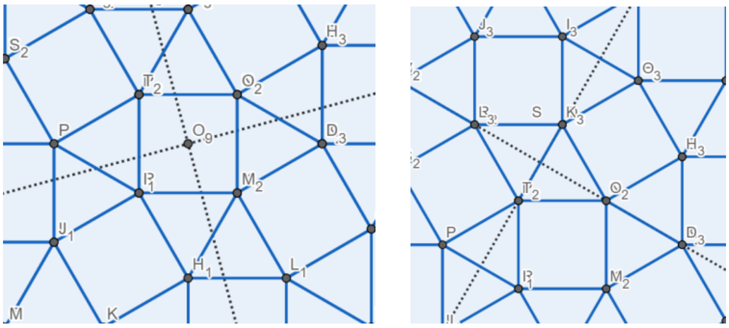


Slika 51: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(\mathbf{3,3,4,3,4})$			
izhodišče	rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče kvadrata	$R(90°)$	$T(15° + n \cdot 90°, e)$	ni zrcaljenj
2. središče trikotnika	ni rotacij	$T(15° + n \cdot 90°, e)$	$Z(150°)$

Tabela 10

e je razdalja med središčema dveh najbližjih kvadratov, ki si ne delita oglišča. Izbrani kvadrat ima stranice vzporedne koordinatnima osema. Izbrani trikotnik ima spodnjo stranico vzporedno z osjo x.

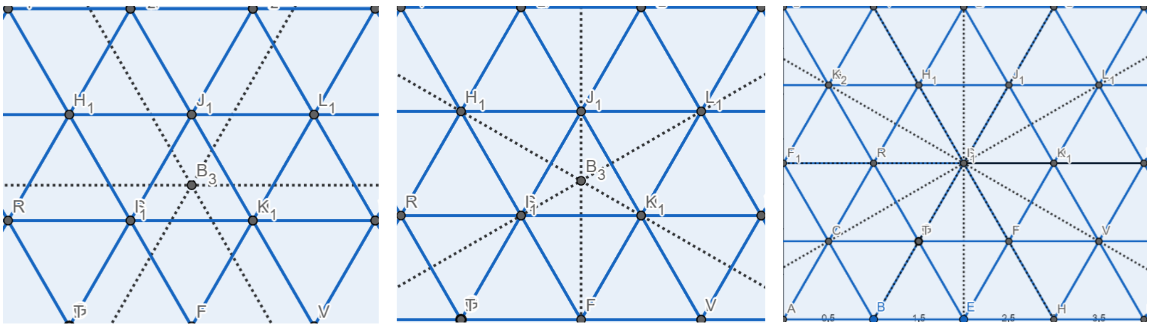


Slika 52: Od leve proti desni: translacija, 2. zrcaljenje

Tlakovanje $(3,3,3,3,3,3)$			
izhodišče	Rotacije	vzporedni premiki	zrcaljenja
1. središče trikotnika	$R(120°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(30° + n \cdot 60°)$
2. vozlišče	$R(60°)$	$T(n \cdot 60°, e)$	$Z(n \cdot 30°)$

Tabela 11

e je razdalja med središčema dveh najbližjih trikotnikov, ki si ne delita stranice (lahko si delita oglišče).



Slika 53: Od leve proti desni: translacija, 1. zrcaljenje, 2. zrcaljenje

Opombe:

- Pri tlakovanjih $(3,3,3,4,4)$, $(3,3,4,3,4)$, $(3,3,3,3,6)$ sem kote $75°, 15°, 19°$ izmerila z Geogebro.
- V vsakem od navedenih tlakovanj sem izbrala največji mnogokotnik M. S translacijami iz tabele lahko iz tega mnogokotnika dosežem vse enako poravnane skladne mnogokotnike in obratno. Enako poravnane pomeni vse mnogokotnike, ki imajo spodnjo stranico vzporedno z isto premico kot mnogokotnik M. V vseh tlakovanjih so taki vsi mnogokotniki skladni z M , izjema je le tlakovanje $(3,3,4,3,4)$.
- Tlakovanje $(3,3,3,3,6)$ nima zrcaljenj.

6.3. Ugotovitev

V tabelah so navedene samo osnovne preslikave, ki dano mrežo preslikajo samo vase. Vse ostale preslikave dobim s sestavljanjem (komponiranjem) preslikav v tabeli.

Naj bosta F in G preslikavi mreže nase.

Kompozitum ($\circ$) preslikav $F \circ G$ je preslikava mreže nase, ki jo dobim tako, da mrežo najprej preslikam s preslikavo G in nato še s preslikavo F; $(F \circ G)(x, y) = F\big(G(x, y)\big)$, kje je (x, y) poljubna točka v ravnini.

Kompozitum preslikav F, G in H je definiran kot $F \circ G \circ H = F \circ (G \circ H)$, krajše zapisano FGH. Če je preslikav več, nadaljujem po enakem postopku. Velja:

$F \circ (G \circ H)(x, y) = F\Big(H\big(G\,(x, y)\big)\Big)$ in $(F \circ G) \circ H(x, y) = F\Big(G\big(H\,(x, y)\big)\Big)$.

Ker lega oklepajev ni pomembna za operacijo, je kompozitum asociativna operacija. Ker operacija kompozitum iz dveh preslikav mreže nase sestavi tretjo preslikavo mreže nase, je operacija kompozitum binarna operacija v množici vseh preslikav mreže nase.

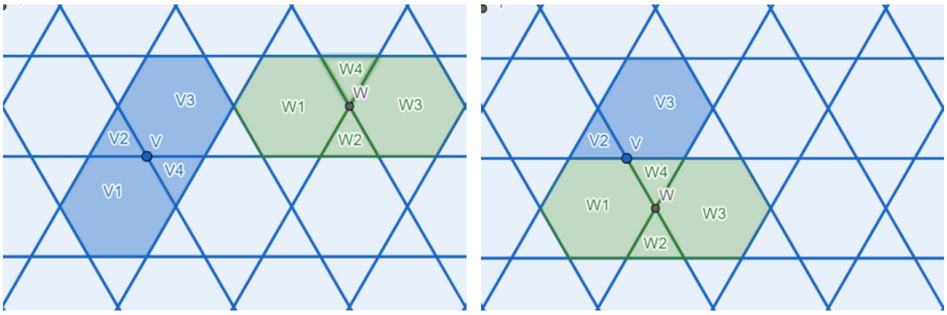
Ugotovitev 1: Naj bo A dano Arhimedovo tlakovanje s pripadajočo tabelo in F preslikava, ki preslika dano Arhimedovo tlakovanje A samo nase. Ugotovim, da lahko preslikavo F sestavim iz preslikav navedenih v tabeli.

Uvod v utemeljitev: V tlakovanju A si izberem vozlišče V in mnogokotnike $V_1, \dots, V_k$, $k = 3, 4, 5, 6$, razporejene okoli vozlišča V v pozitivni smeri. Naj bo F preslikava mreže nase. Vozlišče W in mnogokotniki okoli tega vozlišča $W_1, \dots, W_k$ naj bodo taki, da preslikava F preslika vozlišče W na vozlišče V in mnogokotnike $W_1, \dots, W_k$ na mnogokotnike $V_1, \dots, V_k$. Med preslikavami mreže nase, ki ohranjajo kote in razdalje, je F edina preslikava, ki preslika vozlišče W na vozlišče V in mnogokotnike $W_1, \dots, W_k$ na mnogokotnike $V_1, \dots, V_k$. Moj cilj je ugotoviti, iz katerih osnovnih preslikav je sestavljena preslikava F. To bom utemeljila v štirih korakih. Privzela bom, da preslikava F ni identiteta.

Vsak korak utemeljitve sem preverila za vsako tlakovanje posebej.

Opomba: $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$

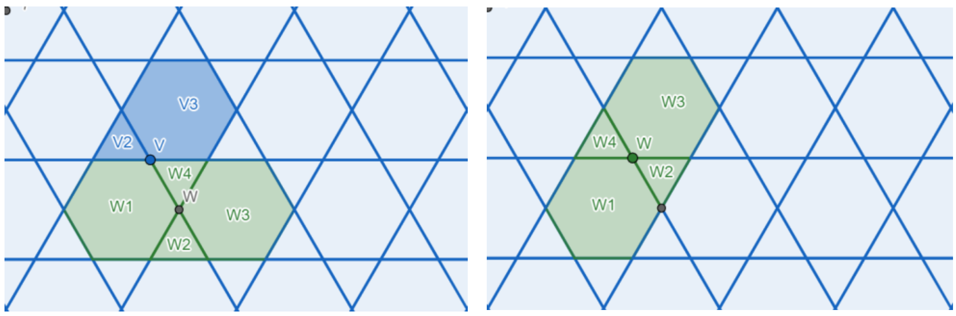
1. korak utemeljitve*:* Naj bo A dano Arhimedovo tlakovanje. Izbrano vozlišče V je eno izmed oglišč mnogokotnika M, ki je največji mnogokotnik tlakovanja, in vozlišče W eno izmed oglišč mnogokotnika M_1, skladnega M. S translacijami, ki premaknejo tlakovanje A samo vase in imajo za izhodišče središče mnogokotnika M, lahko mnogokotnik M_1 premaknemo na M in z njim vozlišče W v eno od oglišč M. Translacija, ki premakne W v eno od oglišč M, je lahko sestavljena iz več translaciji iz tabele. Te translacije so lahko pod različnimi koti za različno enot, zato bom translacijo predstavljala kot T. Translacija je prva preslikava, ki sestavlja preslikavo F.



Slika 54: Od leve proti desni pred in po opravljenem 1. koraku utemeljitve

Primer: Ko sem zelen 6-kotnik W_1 (ki predstavlja M_1) premaknila na moder 6-kotnik V_1 (ki predstavlja M), sem tudi vozlišče W premaknila na eno izmed oglišč 6-kotnika V_1 (ki predstavlja M).

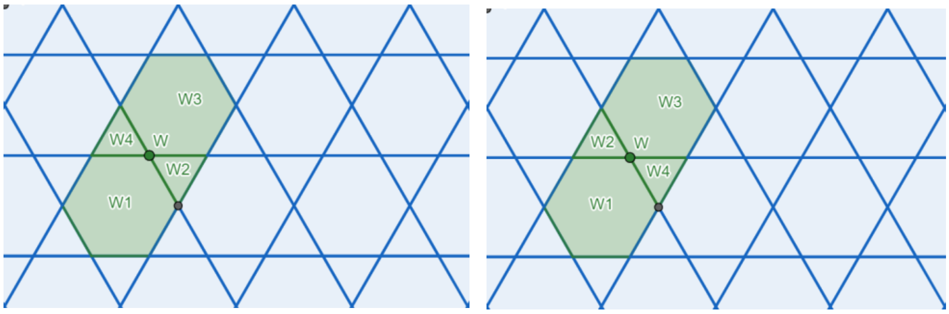
2. <u>korak utemeljitve:</u> Z rotacijami $R(\alpha)$ in zrcaljenji $Z(\beta)$, ki imajo za izhodišče središče mnogokotnika $M = M_1$, lahko dano oglišče mnogokotnika M, ki je hkrati vozlišče W, preslikam v katerokoli oglišče mnogokotnika M, kar pomeni tudi v oglišče, ki je hkrati vozlišče V. Rotacija za določen kot je sestavljena iz n rotacij za α iz tabele, zato jo bom predstavljala kot $R(n \cdot \alpha)$. Taka rotacija in/ali zrcaljenje, da se bo W preslikal v V, je naslednja preslikava, ki sestavlja preslikavo F.



Slika 55: Od leve proti desni: Pred in po opravljenem 2. koraku utemeljitve

Primer: Z rotacijo okoli središča mnogokotnika $V_1 = W_1$, (ki predstavlja $M = M_1$) sem vozlišče W preslikala na vozlišče V. Hkrati pa se je 6-kotnik W_3 preslikal na 6-kotnik V_3, trikotnik W_4 na trikotnik V_2 in trikotnik W_2 na trikotnik V_4.

3. <u>korak utemeljitve:</u> Po opravljenem 1. in 2. koraku utemeljitve so lahko mnogokotniki $W_1, \dots, W_k, k = 3, 4, 5\ 6$, okoli vozlišča $W = V$ orientirani drugače, kot so orientirani mnogokotniki $V_1, \dots, V_k$ okoli vozlišča $V = W$. Z zrcaljenjem lahko morebitno napačno orientacijo popravim. Če je <u>3. korak</u> potreben, bo zrcaljenje iz tabele, ki je lahko tudi različno od morebitnih prejšnjih zrcaljenj, predstavljeno kot $Z(\gamma)$. Zrcaljenje $Z(\gamma)$ bo zadnja preslikava, ki sestavlja preslikavo F.



Slika 56: Od leve proti desni: Pred in po opravljenem 3. koraku utemeljitve

Primer: po opravljenem zrcaljenju je orientacija mnogokotnikov $W_1, \dots, W_4$ okoli vozlišča $W = V$ (glej *Sliko 56, desno*), enaka orientaciji mnogokotnikov $V_1, \dots, V_4$ okoli vozlišča V (glej *Sliko 54, levo*). Velja $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$, $W_3 = V_3$ in $W_4 = V_4$.

4. <u>korak utemeljitve:</u> Preslikava F je torej sestavljena iz preslikav tabele. V najslabšem primeru so za doseg cilja potrebni vsi štirje koraki utemeljitve, torej translacija, rotacija in dve zrcaljenji. Matematično to zapišem z uporabo operacije kompozitum. Torej imam v splošnem primeru:

$$F = Z(\gamma) \circ Z(\beta) \circ R(n \cdot \alpha) \circ T.$$

Če kateri od korakov utemeljitve ni bil potreben, ustrezna preslikava v tem zapisu ne nastopa.

6.4. Grupe

Med raziskovanjem preslikav sem naletela na pojem grupa. Ugotovila sem, da imajo vse preslikave, ki dano tlakovanje A preslikajo samo nase, matematično strukturo grupe (G).

*»**Grupa** je množica G z dano binarno operacijo. Po tej operaciji pripada vsakemu urejenemu paru $a, b \in G$ natanko določen element v G. Ta element imenujemo kompozitum ali produkt in ga pišemo ab. Pri tem morajo biti izpolnjeni pogoji:*

1. *Za poljubne elemente $a, b, c \in G$ velja $(ab)c = a(bc)$ (asociativni zakon).*
2. *V množici G eksistira tak element e, da je $ae = ea = a$ za vsak $a \in G$.*
3. *Vsakemu elementu $a \in G$ pripada inverzni element a^{-1}, za katerega velja $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ «*
   (Vidav, 1989)

Ugotovitev 2: Naj bo A dano Arhimedovo tlakovanje. Množica vseh preslikav, ki preslikajo tlakovanje samo nase, je grupa za operacijo kompozitum.

Vem že, da je kompozitum asociativna in binarna operacija.

Za utemeljitev, da je množica grupa, bom:

- poiskala nevtralni element e in
- poiskala inverzne elemente.

Nevtralni element e je preslikava Id, ki preslika vsako vozlišče tlakovanja nase. Lahko je predstavljena kot translacija vzporedno s premico pod poljubnim kotom za nič enot ($T(\alpha, 0 \cdot e)$) ali rotacija za $0°$ = $360°$. Če tlakovanja ne rotiram, se nobena točka ne premakne. Če tlakovanje rotiram za $360°$, pridem na začetek in se vsaka točka preslika sama vase.

Inverzni element za dano preslikavo F iz grupe, je njej inverzna preslikava F^{-1}. Inverzna preslikava preslika mrežo v prvotno stanje. Ker je preslikava F sestavljena iz preslikav iz tabele, dobim inverzno preslikavo (F^{-1}) tako, da opravim inverzne preslikave preslikav, ki sestavljajo F, v obratnem vrstnem redu. Če je $F = Z \circ R \circ T$, je $F^{-1} = T^{-1} \circ R^{-1} \circ Z^{-1}$. Poiščem ga s pomočjo pravila $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Inverzni element za zrcaljenje je zrcaljenje samo, saj je zrcaljene sama sebi inverzna preslikava ($Z^{-1} = Z$). Če je točka A na levi strani osi y in jo zrcalim čez os y, se točka A iz leve preslika na desno stran osi y. Če točko A še enkrat zrcalim se bo iz desne strani osi y preslikala nazaj na levo stran osi y, $Z^{-1} \circ Z = Z \circ Z^{-1} = e$.

Inverzni element rotacije je vedno $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha)$. Če mrežo zarotiram za kot $R(\alpha)$ in nato še za kot $R(\beta)$ je to enako kot, če bi mrežo rotirala za kot $R(\alpha + \beta)$, $R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha + \beta)$.

Vem, da je $e = R(0°) = R(360°)$. Ugotovim, da je $R(360°) \circ R(-\alpha) = R(360° - \alpha) = R(\alpha)^{-1}$. Ker želim, da je rotacija za pozitiven kot, bom za ugotavljanje inverznega elementa namesto formule $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha)$ uporabila formulo $R(\alpha)^{-1} = R(360° - \alpha), R(\alpha)^{-1} \circ R(\alpha) = R(360°) = e$.

Inverzni element translacije je vedno translacija vzporedno z isto premico v nasprotno smer, $T(\alpha, k \cdot e)^{-1} = T(\alpha, -k \cdot e)$. Če mrežo iz prvotnega mesta premaknem za eno enoto v desno, jo lahko s translacijo za eno enoto v levo premaknem na prvotno mesto, $T(\alpha, k \cdot e)^{-1} \circ T(\alpha, k \cdot e) = T(\alpha, 0 \cdot e) = e$.

Po ugotovitvi 1 je vsaka preslikava F iz grupe v splošnem:

$$F = Z(\gamma) \circ Z(\beta) \circ R(n \cdot \alpha) \circ T.$$

Njej inverzna preslikava F pa:

$$F^{-1} = T^{-1} \circ R(360° - (n \cdot \alpha)) \circ Z(\beta) \circ Z(\gamma).$$

Ker je preslikava T kompozitum translacij, je preslikava T^{-1} kompozitum translacij pod istimi koti v nasprotnih smereh.

7 ZAKLJUČEK

Ugotovila sem, da je tlakovanj s pravilnimi mnogokotniki zelo veliko, zato sem se omejila na Arhimedova tlakovanja. Takih tlakovanj je 11. Med njimi so le tri tlakovanja z enakimi mnogokotniki.

V splošnem se Arhimedova tlakovanja razširijo v k-Arhimedova tlakovanja, kar pomeni, da v tlakovanju obstaja več tipov vozlišč.

Med raziskovanjem sem ugotovila, da se lahko Arhimedova tlakovanja na različne načine preslikam sama vase. Pri definicijah preslikav sem se oprla na koordinatni sistem. Ugotovila sem, da lahko tovrstne preslikave sestavljam. Branje v obstoječi literaturi je bilo zanimivo in mi je dalo nove priložnosti za raziskovanje. Naučila sem se, kaj je grupa in pokazala, da so preslikave tlakovanja same vase grupa.

Med pregledovanjem najrazličnejših slik me je navdušila umetnost, povezana s tlakovanjem. V umetnosti se odpirajo številna matematična vprašanja in eno od zanimivejših je "Kako tlakovati večdimenzionalni prostor?"

8 VIRI IN LITERATURA

Vir (*Slika 1*) dostopno na: https://www.pinterest.cl/pin/132222939039948619/

Vir (*Slika 2, levo*), dostopno na: https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/horseman-1 (pridobljeno 21. 02. 2021),

Vir (*Slika 2, desno*), dostopno na: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiles_in_Topkap%C4%B1_Palace_-_0099.jpg (pridobljeno 21. 02. 2021)

Vir (*Slika 3*), dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Patterns_in_nature (pridobljeno 21. 02. 2021)

Vir (*Slika 4*), dostopno na: https://www.momjobgo.com/yomi98/archives/story/50 (pridobljeno 21. 02. 2021)

Vir (*Slika 5*), dostopno na: https://www.quantamagazine.org/the-math-problem-with-pentagons-20171211) (pridobljeno 21. 02. 2021)

Vir (Slika 6-56): osebni arhiv

Grunbaum, B. in C. Shephard, G. (1977). Tilings by Regular Polygons, *Mathematics Magazine*, 50/5, 227-247.

Riosa, B. (2016). *Tlakovanje z zvezdastimi mnogokotniki* (Magistrska naloga, Pedagoška fakulteta). Dostopno na: http://pefprints.pef.uni-lj.si/4100/1/mag_delo.pdf (pridobljeno 21. 02. 2021)

Vidav, I. (1989). *Algebra*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Mnogokotnik [online]. 2021. *Wikipedia, the free encyclopedia*. [Citirano 21. 02. 2021]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Mnogokotnik

Pravilni mnogokotnik [online]. 2021. *Wikipedia, the free encyclopedia*. [Citirano 21. 02. 2021]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Pravilni_mnogokotnik

9 PRILOGE

```pascal
program formula ;
var k1, k2, k3:integer;// definiram celostevilske spremenljivke k1, k2, k3
Begin
  for k1:=3 to 42 Do         // k1 je najmanjsa spremenljivka
    Begin
      for  k2:=k1 to 42 Do   // k2 je vecji ali enak k1
       Begin
        for k3:=k2 to 42 do  //k3 je vecji ali enak k2
          Begin
            if(k1*k2*k3-2*((k1*k2)+(k1*k3)+(k2*k3))=0) Then
              begin
               writeln(k1,' ',k2,' ',k3);
              (*ce k1, k2 in k3 ustrezajo pogojem formule jih program izpise*)
             end;
          end;
       end;
    end;
  readln;
end.
```

Priloga 1: Programska koda za tlakovanje s tremi mnogokotniki

```pascal
program formula2;
var k1,k2,k3,k4:integer; //definiram celostevilske spremenljivke k1, k2, k3, k4
Begin
  for k1:=3 to 12 Do              // k1 je najmanjsa spremenljivka
    Begin
      for k2:=k1 to 12 Do         // k2 je vecji ali enak k1
        Begin
          for k3:=k2 to 12 Do     //k3 je vecji ali enak k2
            Begin
              for k4:=k3 to 12 Do //k4 je vecji ali enak k3
                Begin
                  if 2*k1*k2*k3*k4 -2*((k1*k2*k3)+(k1*k2*k4)+(k1*k3*k4)+(k2*k3*k4))=0 Then
                    Begin
                     writeln(k1,' ',k2,' ',k3,' ',k4);
                    (*ce k1, k2, k3 in k4 ustrezajo pogojem formule jih program izpise*)
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
  readln;
end.
```

Priloga 2: Programska koda za tlakovanje s štirimi mnogokotniki

```
program formula3;
var k1,k2,k3,k4,k5:integer; //definiram celostevilske spremenljivke k1, k2, k3, k4
Begin
  for k1:=3 to 6 Do                  // k1 je najmanjsa spremenljivka
    Begin
      for k2:=k1 to 6 Do             // k2 je vecji ali enak k1
        Begin
          for k3:=k2 to 6 Do         // k3 je vecji ali enak k2
            Begin
              for k4:=k3 to 6 Do     // k4 je vecji ali enak k3
                Begin
                  for k5:=k4 to 6 Do // k5 je vecji ali enak k4
                    Begin
                      if 3*k1*k2*k3*k4*k5-2*((k1*k2*k3*k4)+(k1*k2*k4*k5)+(k1*k2*k3*k5)+(k1*k3*k4*k5)+(k2*k3*k4*k5))=0 Then
                       Begin
                         writeln(k1,' ',k2,' ',k3,' ',k4,' ',k5);
                         (*ce k1, k2, k3, k4 in k5 ustrezajo pogojem formule jih program izpise*)
                        end;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
  readln;
end.
```

Priloga 3: Programska koda za tlakovanje s petimi mnogokotniki