55. SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV SLOVENIJE

GEOMETRIJSKE ROŽICE

Raziskovalno področje: Matematika ali logika

Raziskovalna naloga

Šola: OŠ borcev za severno mejo, Maribor

Avtorja: Tadej Cajzek in Naja Tošović

Mentor: Alenka Repnik

Maribor, januar 2021

KAZALO

KAZALO SLIK

POVZETEK

Za raziskovanje smo izbrali like, ki jih omejujejo krožni loki. Pri tem smo se osredotočili na like, ki nastanejo pod točno določenimi pogoji, in sicer smo raziskovali like, ki jih dobimo, če se enakostranični trikotnik s stranico a zavrti okrog pravilnega večkotnika, katerega stranica je prav tako dolžine a, in pri tem s prostimi oglišči »riše« tako imenovane cvetne liste.

Ugotavljali smo, kakšen je obseg tako nastalega lika in kako se obseg spreminja, glede na pravilni večkotnik, okrog katerega se zavrti enakostranični trikotnik.

Ključne besede: geometrija, enakostranični trikotnik, večkotnik, krožni lok, obseg, cvetni listi

ABSTRACT

For our research we chose shapes bounded by circular arcs. We focused on shapes that emerge under well-defined conditions. We researched shapes that we obtain if an equilateral triangle with side a rotates around a regular polygon whose side is also of length a. In doing so equilateral triangle draws so-called flower petals with free vertices.

We were trying to find out what the perimeter of the shape that formed is and how the perimeter changes according to regular polygon around which an equilateral triangle rotates.

Keywords: geometry, equilateral triangle, polygon, arc, perimeter, flower petals

1 UVOD

1.1 Namen in cilj naloge

Namen in cilj pričujoče raziskovalne naloge je raziskati “geometrijske rožice”. Geometrijska rožica je lik, ki nastane, ko se enakostranični trikotnik s stranico a zavrti okrog pravilnega večkotnika, katerega stranica je prav tako dolžine a in pri tem s prostimi oglišči riše tako imenovane cvetne liste.

Naš namen je bil ugotoviti, kakšen je obseg lika, ki tako nastane in kako se obseg spreminja, glede na pravilni večkotnik.

Želeli smo odkriti splošno formulo, s katero lahko izračunamo obseg lika, ne glede na vrsto pravilnega večkotnika, nad katerim nastane geometrijska rožica. Raziskovanje smo začeli s pravilnim (enakostraničnim) trikotnikom v sredini rožice, nadaljevali pa s pravilnim štirikotnikom (kvadratom), pa pravilnim petkotnikom, šestkotnikom ...

1.2 Hipoteze

Na podlagi raziskovalnih vprašanj smo pred začetkom raziskovanja postavili naslednje hipoteze.

Hipoteza 1: Obseg geometrijske rožice bo vsaj dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika, nad katerim nastaja ta geometrijska rožica.

Hipoteza 2: Dolžina krožnega loka (od katerega je odvisen obseg geometrijske rožice) je odvisna od pravilnega večkotnika, nad katerim nastaja geometrijska rožica.

Hipoteza 3: Sprememba dolžine krožnega loka med n-kotnikom in $(n+1)$-kotnikom bo konstantna.

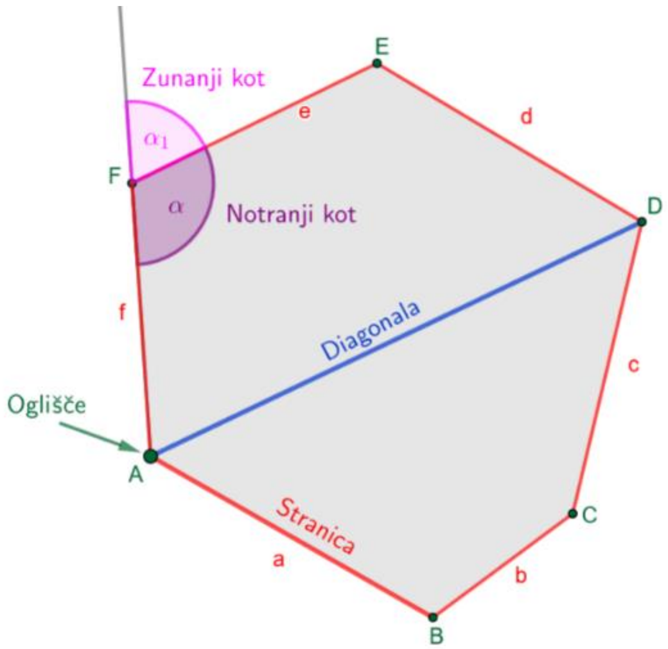
2 METODOLOGIJA DELA

Pri raziskovanju smo uporabili več metod, predvsem metodo opazovanja in iskanja ter zbiranja podatkov. Opazovali smo, kako se spreminja dolžina krožnih lokov (cvetnih listov) in obseg celotnega lika – geometrijske rožice. Pred začetkom raziskovanja smo se spomnili nam že znanih lastnosti pravilnih večkotnikov in kroga ter obrazcev za računanje predvsem obsega in tudi ploščin pravilnih večkotnikov in kroga ter dolžine krožnega loka in ploščine krožnega izseka. S pomočjo pisnih virov smo to znanje uredili in predstavili v teoretičnem uvodu. Pri raziskovanju smo se izračunov lotili sistematično, najprej smo se lotili trilistne geometrijske rožice, nato štirilistne, pa petlistne in šestlistne geometrijske rožice. Končno smo izpeljali splošno formulo za izračun obsega n-listne rožice.

3 VEČKOTNIKI

Večkotnik je lik, ki ga omejuje enostavna sklenjena lomljenka. Večkotnike poimenujemo po številu daljic (stranic), ki ga omejujejo. Število oglišč večkotnika je enako številu stranic tega večkotnika. Stranica je daljica, ki povezuje sosednji oglišči. Nesosednji oglišči večkotnika povezuje daljica, ki jo imenujemo diagonala. Večkotnik ima prav toliko kot stranic tudi notranjih kotov, pa tudi zunanjih kotov.

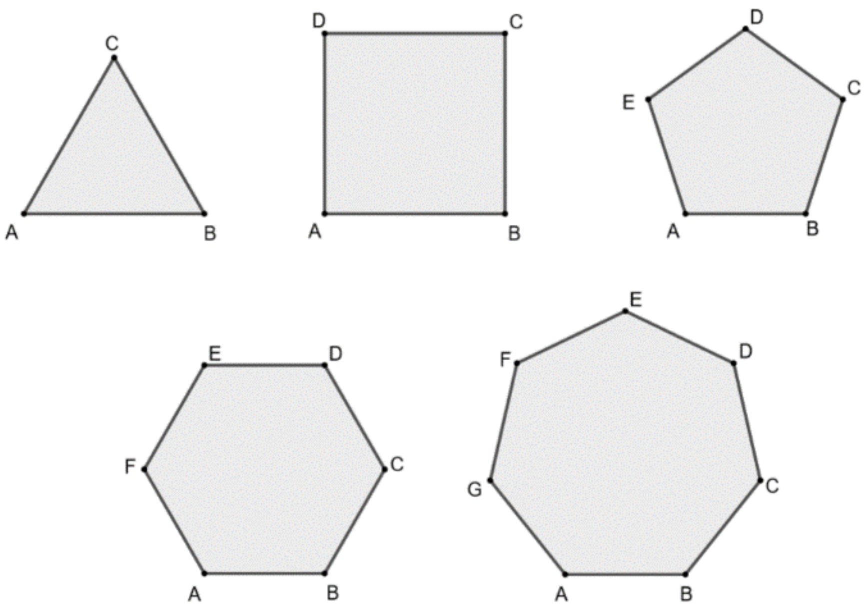
Če ima večkotnik n-stranic, ga imenujemo n-kotnik. Pri tem je potrebno poudariti, da je n naravno število večje ali enako 3 ($n \in \mathbb{N}; n \geq 3$).



Slika 1: Večkotnik z oznako oglišča, stranice, diagonale ter notranjega in zunanjega kota (vir: avtor)

3.1 Pravilni večkotniki

Pravilne večkotnike predstavljamo podrobneje, saj so pravilni večkotniki »osnova« naših geometrijskih rožic.



Slika 2: Pravilni večkotniki (vir: avtor)

Pravilni večkotniki so večkotniki, katerih stranice so med seboj skladne, prav tako so med seboj skladni vsi notranji koti. Posledično so tudi vsi zunanji koti posameznega pravilnega večkotnika med seboj skladni.

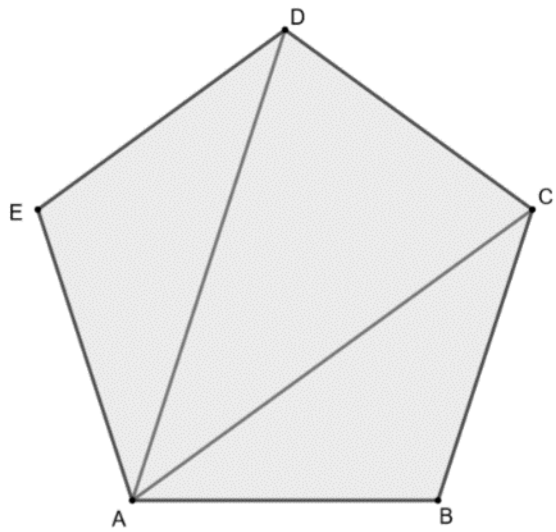
Vsi pravilni večkotniki so konveksni, torej je posamezni notranji kot manjši od 180°.

Lik je osno simetričen, ko se preko premice preslika sam vase. To premico imenujemo simetrala. Lik lahko ima samo eno ali več simetral, kot npr. pravilni večkotniki. Pravilni večkotnik ima toliko simetral, kolikor ima stranic. Pravilni večkotniki s sodim številom stranic so tudi središčno somerni, kar pomeni, da obstaja točka S (središče simetrije), čez katero se lik prezrcali sam vase.

3.2 Število diagonal večkotnika

Kot smo že zapisali, so diagonale daljice, ki povezujejo nesosednja oglišča večkotnika. Število diagonal iz enega oglišča je za tri manjše od števila oglišč (stranic) večkotnika. Za n-kotnik torej velja, da je število diagonal iz enega oglišča enako:

$$(n-3).$$



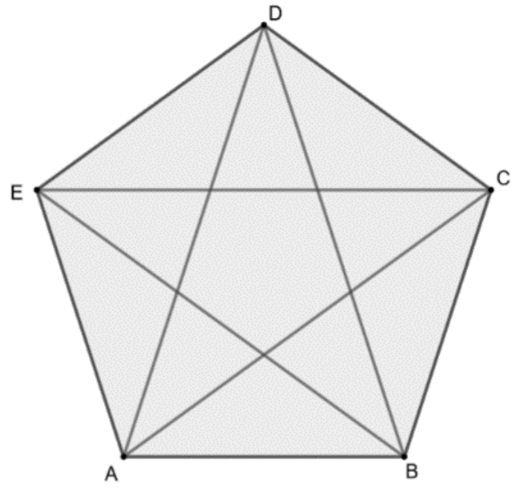
Slika 3: Diagonale iz enega oglišča petkotnika (vir: avtor)

Vseh diagonal v n-kotniku je torej:

$$n \cdot (n-3).$$

Pri tem moramo upoštevati še, da je diagonala AC enaka diagonali CA, torej je izračunano število diagonal dvakratnik vrisanih diagonal. Število vseh diagonal vrisanih poljubnemu n-kotniku je enako:

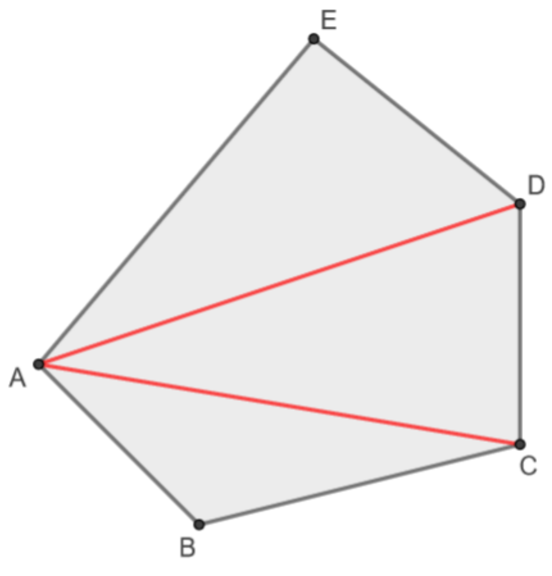
$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$



Slika 4: Diagonale petkotnika (vir: avtor)

3.3 Vsota notranjih kotov večkotnika

Vsoto notranjih kotov poljubnega n-kotnika lahko izračunamo tako, da n-kotnik s pomočjo diagonal iz enega oglišča razdelimo na trikotnike. Število diagonal iz posameznega oglišča n-kotnika je $(n-3)$.



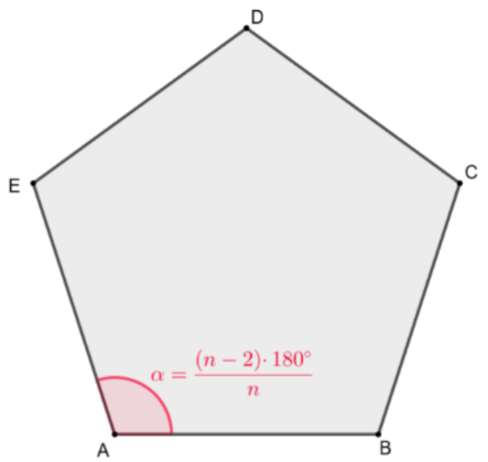
Slika 5: Delitev večkotnika s pomočjo diagonal iz enega oglišča na trikotnike (vir: avtor)

Tako narisane diagonale razdelijo n-kotnik na trikotnike, katerih število je za dva manjše od števila oglišč, torej $(n-2)$. Ker je vsota notranjih kotov v posameznem trikotniku enaka 180°, je vsota vseh notranjih kotov n-kotnika enaka:

$$(n-2) \cdot 180°.$$

Za pravilni večkotnik lahko razmislimo, da je torej posamezni notranji kot (α) enak:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$



Slika 6: Notranji kot pravilnega večkotnika (vir: avtor)

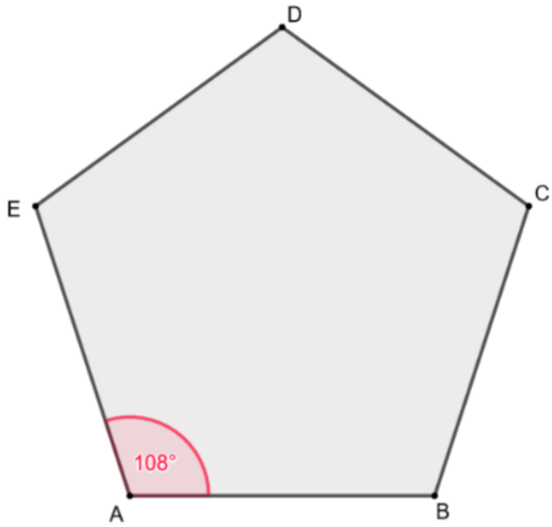
Tako npr. za pravilni petkotnik $(n = 5)$ velja, da je velikost posameznega notranjega kota (α) pravilnega večkotnika enaka:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$\alpha = \frac{(5-2) \cdot 180°}{5}$$

$$\alpha = \frac{3 \cdot 180°}{5}$$

$$\alpha = 108°.$$



Slika 7: Notranji kot pravilnega petkotnika (vir: avtor)

3.4 Vsota zunanjih kotov večkotnika

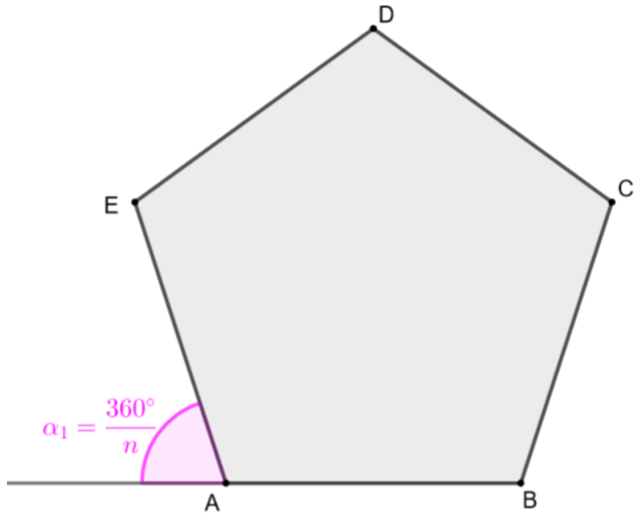
Zunanji in notranji kot večkotnika sta sokota, torej skupaj merita 180°. V poljubnem n-kotniku je torej vsota notranjih in zunanjih kotov skupaj enaka $n \cdot 180°$. Če od te vsote odštejemo prej zapisano vsoto notranjih kotov, dobimo:

$$n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° =$$
$$n \cdot 180° - n \cdot 180° + 2 \cdot 180° = 360°.$$

Vsota zunanjih kotov poljubnega večkotnika je torej vedno 360°, ne glede na število stranic večkotnika.

Zdaj se razmislek o velikosti posameznega zunanjega kota pravilnega večkotnika zdi kot na dlani. Velikost posameznega zunanjega kota (α_1) pravilnega n-kotnika je:

$$\alpha_1 = \frac{360°}{n}.$$



Slika 8: Zunanji kot pravilnega večkotnika (vir: avtor)

3.5 Obseg pravilnega večkotnika

Ker smo predvideli, da je obseg geometrijske rožice vsaj dvakrat večji od obsega pravilnega večkotnika, nad katerim nastane geometrijska rožica, je potrebno zapisati tudi kaj o obsegu pravilnega večkotnika.

Obseg (o) pravilnega večkotnika je enak n-kratniku dolžine stranice (a) tega večkotnika:

$$o = n \cdot a.$$

3.6 Enakostranični trikotnik

Enakostranični trikotnik opisujemo še posebej, ker so nam pri raziskovanju nekatere njegove značilnosti bile v oporo in smo jih pogosto uporabljali.

Ker je posamezni notranji kot pravilnega večkotnika enak:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n},$$

je posamezni notranji kot pravilnega (enakostraničnega) trikotnika enak:

$$\alpha = \frac{(3-2) \cdot 180°}{3}$$

$$\alpha = \frac{180°}{3} = 60°.$$

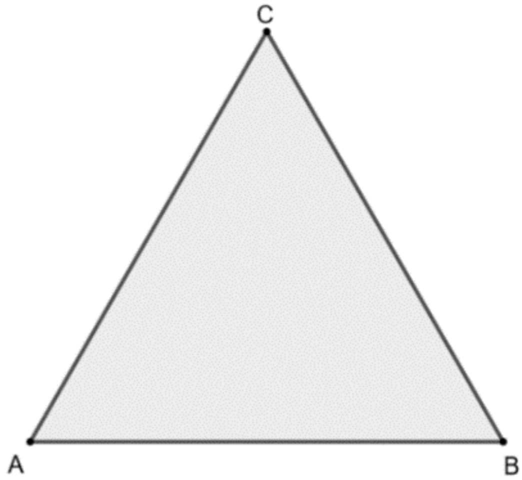
To dejstvo smo uporabili pri številnih kasnejših izračunih.

Obseg enakostraničnega trikotnika je enak trikratniku dolžine njegove stranice (a):

$$o = 3a.$$

Ploščina enakostraničnega trikotnika pa je enaka:

$$p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

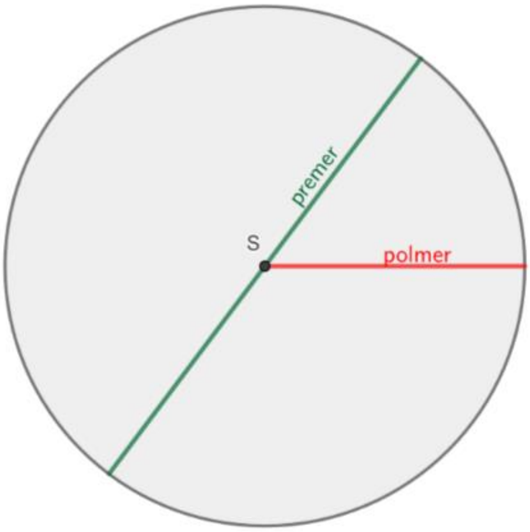


Slika 9: Enakostranični trikotnik (vir: avtor)

4 KROG

Krog je geometrijski lik, ki nima oglišč. Omejuje ga kriva sklenjena črta, krožnica, katere točke so vse enako oddaljene od njenega središča. Krogu se že v osnovni šoli naučimo izračunati obseg, ploščino, dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka.

Razdalja med središčem in poljubno točko na krožnici je polmer (r). Daljico, ki poteka skozi središče in ima krajišči na krožnici, imenujemo premer ($d = 2r$).



Slika 10: Krog z označenim polmerom in premerom (vir: avtor)

4.1 Obseg in ploščina kroga

Obseg (o) kroga je enak dolžini krožnice. Obseg je produkt števila π ($\pi \doteq 3{,}14$) in premera kroga ($2r$). Obrazec za izračun obsega kroga:

$$o = 2\pi r.$$

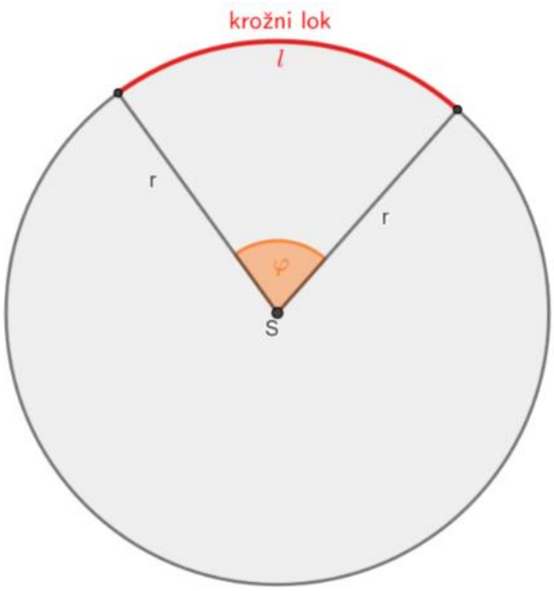
Ploščina (p) kroga je velikost ploskve, ki jo prekriva krog. Je produkt števila π in kvadrata polmera (r^2) kroga. Obrazec za izračun ploščine kroga:

$$p = \pi r^2.$$

4.1.1 Dolžina krožnega loka

Krožni lok (l) je del krožnice, ki ga omejujeta točki na krožnici. Njegova dolžina je odvisna od pripadajočega središčnega kota (φ) in polmera kroga (r). Za izračun dolžine krožnega loka moramo poznati velikost središčnega kota (φ) in dolžino polmera (r):

$$l = \frac{\pi r \varphi}{180°}.$$

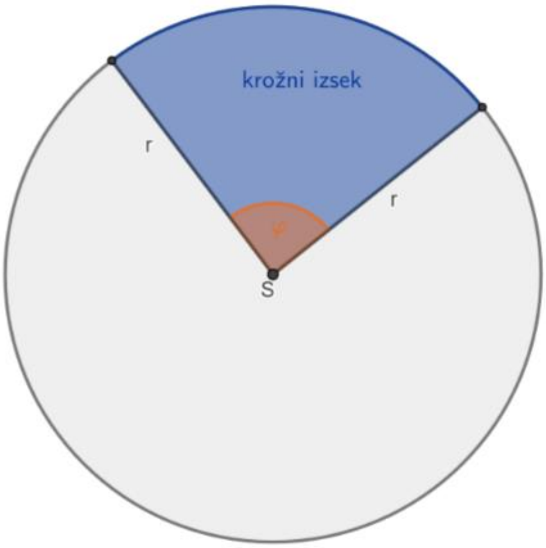


Slika 11: Krožni lok (vir: avtor)

4.1.2 Ploščina krožnega izseka

Krožni izsek je lik, ki ga omejujejo polmera kroga in krožni lok. Za izračun ploščine krožnega izseka potrebujemo velikost pripadajočega središčnega kota (φ) in dolžino polmera kroga (r):

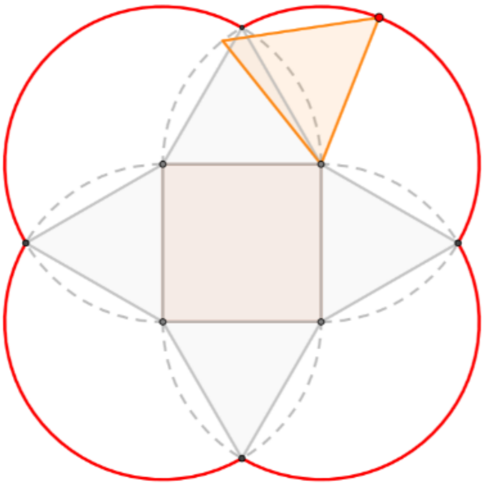
$$p_{izs} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360°}.$$



Slika 12: Krožni izsek (vir: avtor)

5 KAJ JE GEOMETRIJSKA ROŽICA

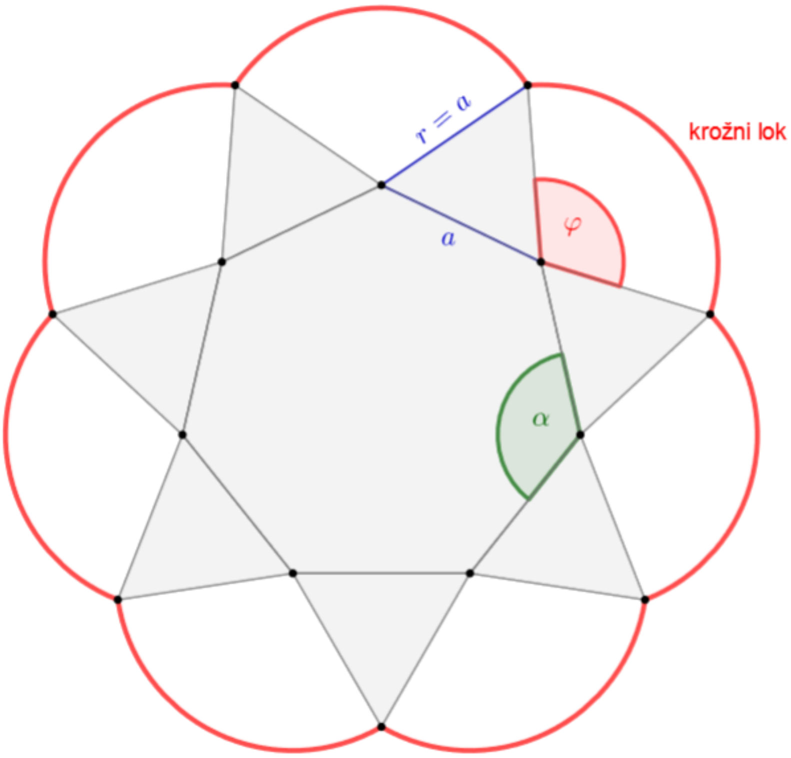
Geometrijska rožica je lik, ki nastane, ko se enakostranični trikotnik s stranico a zavrti okrog pravilnega večkotnika, katerega stranica je prav tako dolžine a in pri tem s prostimi oglišči riše tako imenovane cvetne liste.



Slika 13: Primer 4-listne geometrijske rožice (*vir: avtor*)

Raziskovanje smo začeli z risanjem geometrijskih rožic. Pri tem smo razmeroma kmalu prišli do ugotovitve, da ima posamezna geometrijska rožica prav toliko cvetnih listov, kolikor ima stranic pravilni n-kotnik, okoli katerega se zavrti enakostranični trikotnik. Če se torej enakostranični trikotnik zavrti okoli kvadrata, dobimo štirilistno rožico. Če se enakostranični trikotnik zavrti okoli pravilnega 100-kotnika, dobimo 100-listno rožico.

Obseg geometrijske rožice je odvisen od pravilnega večkotnika, okoli katerega se zavrti enakostranični trikotnik, saj to določa število cvetnih listov rožice. Dolžina posamezne stranice pravilnega večkotnika in posledično tudi enakostraničnega trikotnika je bila za namen naše raziskave vedno enaka (a). Posledično je prav tako vedno enak tudi polmer cvetnih listov ($r = a$). Središčni kot (φ), ki mu posamezni cvetni list pripada, je prav tako odvisen od pravilnega večkotnika, okoli katerega se zavrti enakostranični trikotnik.

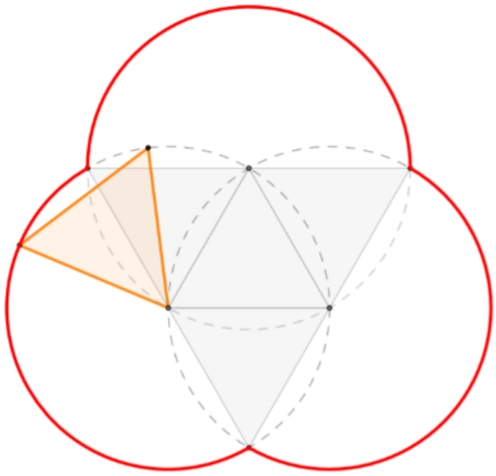


Slika 14: Geometrijska rožica s pomembnejšimi oznakami – notranji kot pravilnega večkotnika, stranica pravilnega večkotnika, krožni lok, njegov polmer in pripadajoči središčni kot (vir: avtor)

Da bi bolje in lažje razumeli, kako je geometrijska rožica sestavljena oziroma kako nastane, smo raziskovanje, kot že rečeno, začeli z načrtovanjem geometrijskih rožic. Sprva smo to začeli na klasičen način, s svinčnikom, šestilom, ravnilom, na papir, kasneje pa še s pomočjo programa za dinamično geometrijo (Geogebra). To nam je bilo v veliko pomoč pri razumevanju raziskovalnega problema.

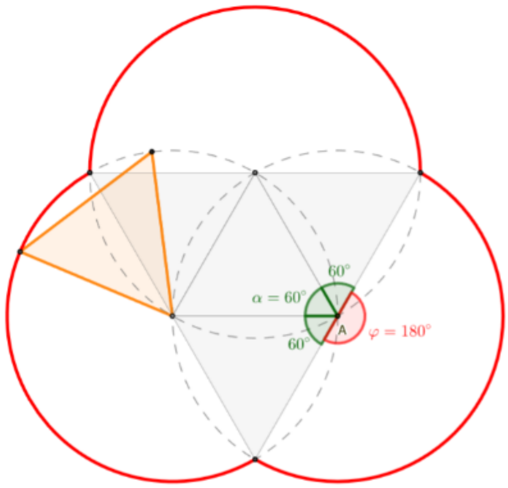
5.1 Obseg trilistne geometrijske rožice

3-listna geometrijska rožica nastane, ko se enakostranični trikotnik zavrti okoli enakostraničnega trikotnika.



Slika 15: 3-listna geometrijska rožica (vir: avtor)

Obseg 3-listne geometrijske rožice sestavljajo trije krožni loki, ki pripadajo središčnemu kotu 180°. Vsak posamezni notranji kot enakostraničnega trikotnika (α) meri 60°, posledično meri središčni kot (φ), ki mu pripada cvetni list geometrijske rožice, 180°.



Slika 16: Koti v 3-listni rožici (vir: avtor)

Polni kot namreč meri 360°, razlika med polnim kotom in trikratnikom posameznega notranjega kota enakostraničnega trikotnika pa je:

$$\varphi = 360° - 3\alpha$$

$$\varphi = 360° - 3 \cdot 60°$$

$$\varphi = 360° - 180°$$

$$\varphi = 180°.$$

Dolžina enega krožnega loka s polmerom a, ki sestavlja 3-listno geometrijsko rožico, nad središčnim kotom φ, je torej:

$$l = \frac{2\pi a\varphi}{360°}$$

$$l = \frac{2\pi a \cdot 180°}{360°}$$

$$l = \pi a.$$

Obseg 3-listne geometrijske rožice je trikratnik dolžine izračunanega krožnega loka:

$$o = 3l$$

$$o = 3\pi a.$$

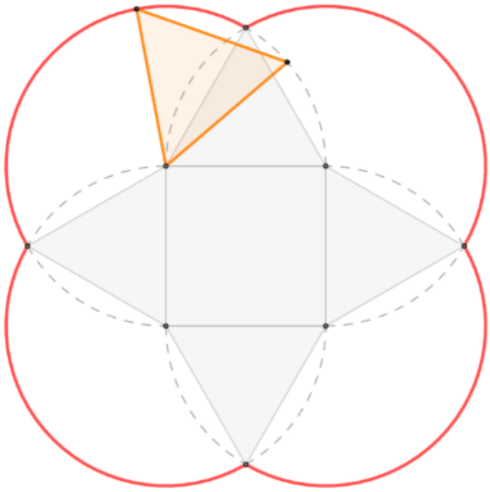
Poglejmo še, kolikšen je količnik obsega 3-listne geometrijske rožice in obsega enakostraničnega trikotnika ($o = 3a$), nad katerim nastane rožica::

$$3\pi a : 3a = \pi \doteq 3{,}14.$$

Obseg 3-listne rožice je torej približno 3,14-krat (natančno π-krat) tolikšen kot obseg enakostraničnega trikotnika, nad katerim je rožica nastala.

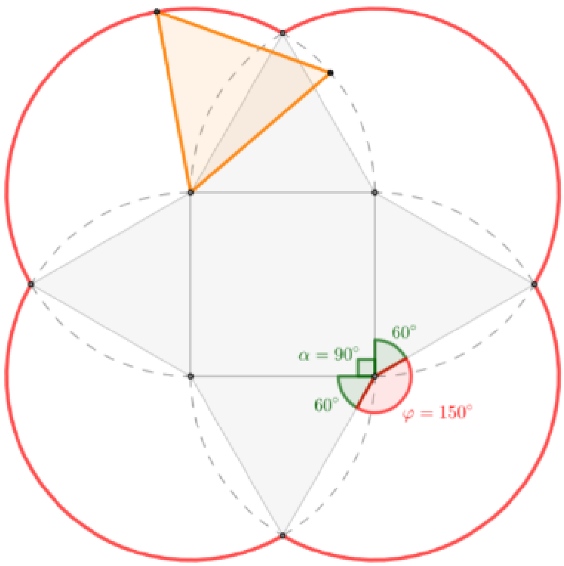
5.2 Obseg štirilistne geometrijske rožice

Štirilistna geometrijska rožica nastane, ko se enakostranični trikotnik zavrti okoli kvadrata (pravilnega štirikotnika).



Slika 17: 4-listna geometrijska rožica (vir: avtor)

Obseg 4-listne geometrijske rožice sestavljajo štirje krožni loki, ki pripadajo središčnemu kotu 150°. Vsak posamezni notranji kot kvadrata (α) meri 90°, notranji kot enakostraničnega trikotnika pa 60°.



Slika 18: Koti v 4-listni rožici (vir: avtor)

Posledično središčni kot (φ), ki mu pripada cvetni list 4-listne geometrijske rožice, meri:

$$\varphi = 360° - (\alpha + 2 \cdot 60°)$$

$$\varphi = 360° - (90° + 2 \cdot 60°)$$

$$\varphi = 360° - 210°$$

$$\varphi = 150°.$$

Dolžina posameznega krožnega loka, ki sestavlja 4-listno geometrijsko rožico nad središčnim kotom φ, je torej:

$$l = \frac{2\pi a\varphi}{360°}$$

$$l = \frac{2\pi a \cdot 150°}{360°}$$

$$l = \frac{5\pi a}{6}.$$

Obseg 4-listne geometrijske rožice je štirikratnik dolžine izračunanega krožnega loka:

$$o = 4l$$

$$o = \frac{4 \cdot 5\pi a}{6}$$

$$o = \frac{10\pi a}{3}.$$

Obseg kvadrata, nad katerim je nastala geometrijska rožica, je enak:

$$o = 4a.$$

Količnik med obsegom rožice in obsegom kvadrata pa znaša:

$$\frac{10\pi a}{3} : 4a = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \doteq 2{,}62.$$

Obseg 4-listne geometrijske rožice je torej približno 2,62-krat tolikšen kot obseg kvadrata, nad katerim je nastala rožica.

Koliko pa se razlikujeta dolžini krožnih lokov 3-listne in 4-listne rožice?

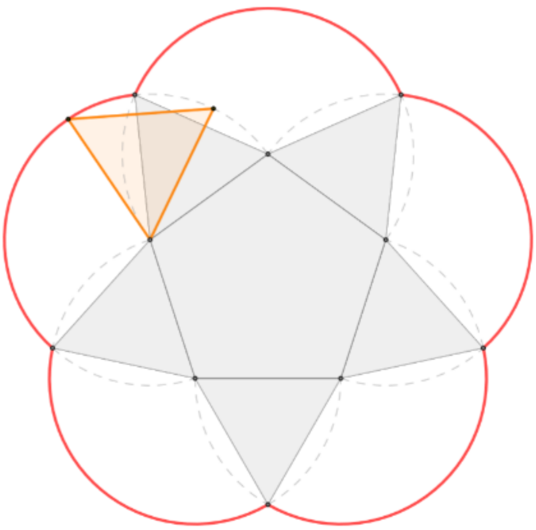
Poglejmo torej razliko med dolžino loka 3-listne rožice in 4-listne rožice:

$$\pi a - \frac{5\pi a}{6} =$$

$$\frac{6\pi a}{6} - \frac{5\pi a}{6} = \frac{\pi a}{6}.$$

5.3 Obseg petlistne geometrijske rožice

Petlistna geometrijska rožica nastane, ko se enakostranični trikotnik zavrti okoli pravilnega petkotnika in pri tem s prostimi oglišči »nariše« cvetne liste 5-listne rožice.



Slika 19: 5-listna geometrijska rožica (vir: avtor)

Zdaj je verjetno že jasno, da obseg 5-listne geometrijske rožice sestavlja pet krožnih lokov. Središčni kot (φ) izračunamo s pomočjo notranjih kotov pravilnega petkotnika in enakostraničnega trikotnika. Vsak posamezni notranji kot pravilnega petkotnika (α) meri:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

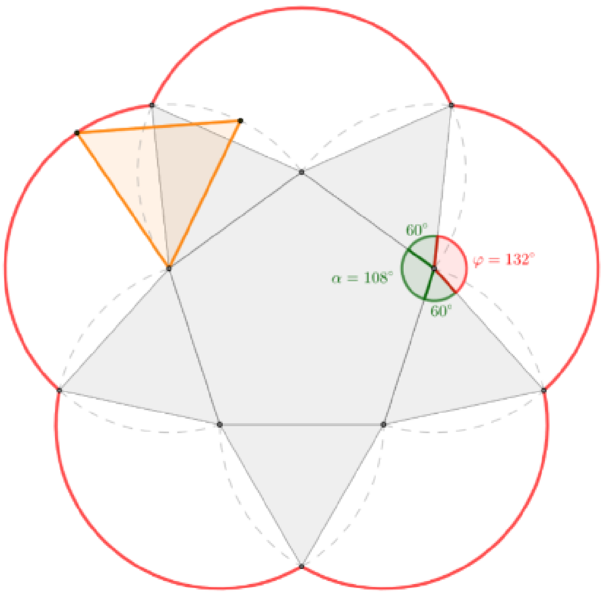
$$\alpha = \frac{(5-2)\cdot 180°}{5}$$

$$\alpha = \frac{3 \cdot 180°}{5}$$
$$\alpha = \frac{540°}{5}$$
$$\alpha = 108°.$$

Notranji kot enakostraničnega trikotnika pa meri 60°. Posledično središčni kot (φ), ki mu pripada cvetni list 5-listne geometrijske rožice, meri:

$$\varphi = 360° - (\alpha + 2 \cdot 60°)$$
$$\varphi = 360° - (108° + 2 \cdot 60°)$$
$$\varphi = 360° - 228°$$
$$\varphi = 132°.$$

S primerjavo središčnih kotov pri do sedaj obravnavanih geometrijskih rožicah potrjujemo, da je središčni kot, ki mu pripada posamezni krožni lok, tem manjši, čim večje je število stranic pravilnega n-kotnika, nad katerim nastaja geometrijska rožica. Dolžina krožnega loka pa je odvisna od tega kota. Torej je dolžina krožnega loka odvisna od pravilnega večkotnika, nad katerim nastaja geometrijska rožica.



Slika 20: Koti v 5-listni rožici (vir: avtor)

Dolžina posameznega krožnega loka, ki sestavlja 5-listno geometrijsko rožico nad središčnim kotom φ, je torej:

$$l = \frac{2\pi a\varphi}{360°}$$

$$l = \frac{2\pi a \cdot 132°}{360°}$$

$$l = \frac{11\pi a}{15}.$$

Obseg 5-listne geometrijske rožice je petkratnik dolžine izračunanega krožnega loka:

$$o = 5l$$

$$o = \frac{5 \cdot 11\pi a}{15}$$

$$o = \frac{11\pi a}{3}.$$

Primerjajmo torej obseg nastale geometrijske rožice in pravilnega petkotnika. Obseg pravilnega petkotnika meri:

$$o = 5a.$$

Koliko-kratnik obsega pravilnega petkotnika je obseg rožice, ki nad tem petkotnikom nastane? Izračunajmo torej količnik med obsegom rožice in obsegom pravilnega petkotnika:

$$\frac{11\pi a}{3} : 5a = \frac{11\pi a}{3} \cdot \frac{1}{5a} = \frac{11\pi}{15} \doteq 2{,}30.$$

Obseg 5-listne geometrijske rožice je torej približno 2,30-krat tolikšen kot obseg pravilnega petkotnika, nad katerim je rožica nastala.

Razlika med dolžino krožnega loka 4-listne rožice in 5-listne rožice je:

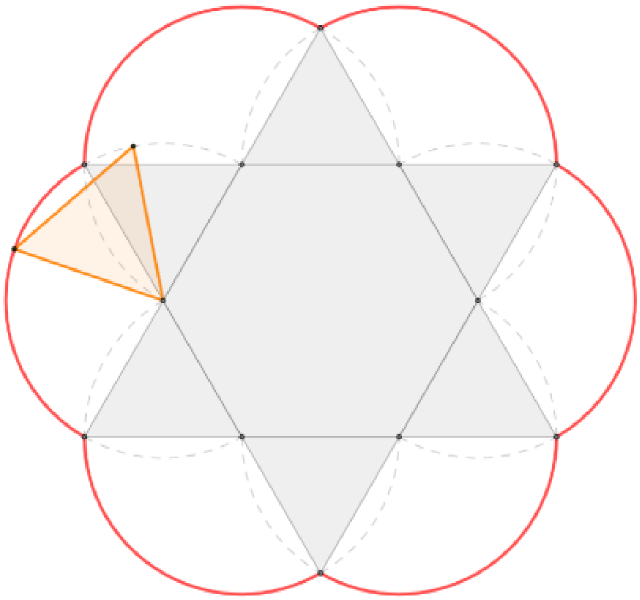
$$\frac{5\pi a}{6} - \frac{11\pi a}{15} =$$

$$\frac{25\pi a}{30} - \frac{22\pi a}{30} = \frac{3\pi a}{30} = \frac{\pi a}{10}.$$

Torej razlika dolžin krožnih lokov 4-listne in 5-listne geometrijske rožice ni enaka kot razlika dolžin lokov med 3-listno in 4-listno rožico, kar hkrati pomeni, da ni konstantna.

5.4 Obseg šestlistne geometrijske rožice

Poglejmo še šestlistno geometrijsko rožico. Ta nastane, ko se enakostranični trikotnik zavrti okoli pravilnega šestkotnika in pri tem s prostimi oglišči nariše cvetne liste 6-listne rožice.



Slika 21: 6-listna geometrijska rožica (vir: avtor)

Obseg 6-listne geometrijske rožice sestavlja šest krožnih lokov. Vsak posamezni notranji kot pravilnega šestkotnika (α) meri:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$\alpha = \frac{(6-2) \cdot 180°}{6}$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot 180°}{6}$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 180°}{3}$$

$$\alpha = 120°.$$

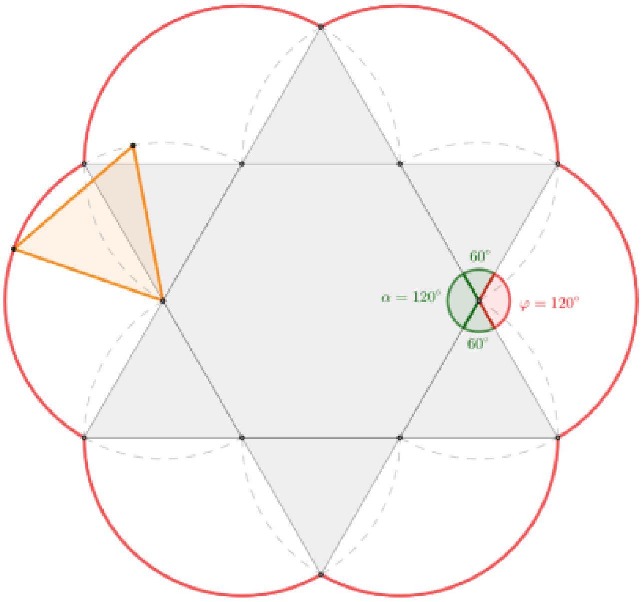
Središčni kot (φ), ki mu pripada cvetni list 6-listne geometrijske rožice, meri (notranji kot enakostraničnega trikotnika meri 60°):

$$\varphi = 360° - (\alpha + 2 \cdot 60°)$$

$$\varphi = 360° - (120° + 2 \cdot 60°)$$

$$\varphi = 360° - 240°$$

$$\varphi = 120°.$$



Slika 22: Koti v 6-listni rožici (vir: avtor)

Dolžina posameznega krožnega loka, ki sestavlja 6-listno geometrijsko rožico nad središčnim kotom φ, je torej:

$$l = \frac{2\pi a\varphi}{360°}$$

$$l = \frac{2\pi a \cdot 120°}{360°}$$

$$l = \frac{2\pi a}{3}.$$

Obseg 6-listne geometrijske rožice je torej šestkratnik dolžine izračunanega krožnega loka:

$$o = 6l$$

$$o = \frac{6 \cdot 2\pi a}{3}$$

$$o = 4\pi a.$$

Obseg pravilnega šestkotnika meri:

$$o = 6a.$$

Količnik obsega 6-listne rožice ter obsega pravilnega 6-kotnika je:

$$4\pi a : 6a = \frac{2\pi}{3} \doteq 2{,}10.$$

Obseg geometrijske rožice nad pravilnim šestkotnikom je torej približno 2,10-kratnik obsega pravilnega šestkotnika.

Glede na do sedaj dobljene količnike sklepamo, da bi ta količnik pri večjem številu stranic pravilnega večkotnika lahko padel pod dva, kar bi pomenilo, da obseg rožice ni vedno vsaj dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika, nad katerim nastane rožica. S tem pa bi bila ovržena naša prva hipoteza, vendar moramo to slutnjo še podpreti.

Primerjajmo še obsega 5-listne in 6-listne rožice, čeprav smo že ugotovili, da ta razlika ne bo enaka kot razlika med obsegoma 3-listne in 4-listne rožice in tudi ne bo enaka razliki obsegov 4-listne in 5-listne rožice.

Razlika med dolžinama posameznega krožnega loka 5-listne in 6-listne rožice je torej:

$$\frac{11\pi a}{15} - \frac{2\pi a}{3} =$$

$$\frac{11\pi a}{15} - \frac{10\pi a}{15} = \frac{\pi a}{15}.$$

5.5 Obseg n-listne geometrijske rožice

Razmislimo torej, kako se spopasti z n-listno rožico. Zdaj že vemo, da za izračun njenega obsega potrebujemo središčni kot (φ), ki mu pripada posamezni cvetni list:

$$\varphi = 360° - (\alpha + 2 \cdot 60°).$$

Pri tem je kot α notranji kot pravilnega n-kotnika in kot smo že zapisali v poglavju 3.3, ta kot meri:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$

Iz obojega dobimo:

$$\varphi = 360° - \left(\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} + 2 \cdot 60°\right)$$

$$\varphi = 360° - \left(\frac{n \cdot 180° - 360°}{n} + \frac{n \cdot 120°}{n}\right)$$

$$\varphi = 360° - \left(\frac{n \cdot 300° - 360°}{n}\right)$$

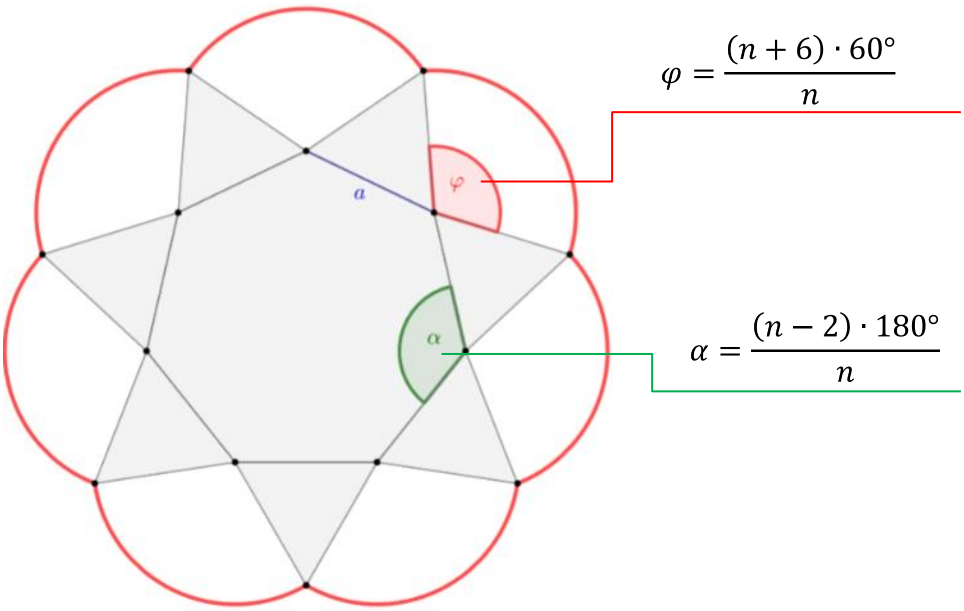
$$\varphi = 360° - \frac{n \cdot 300°}{n} + \frac{360°}{n}$$

$$\varphi = \frac{n \cdot 360°}{n} - \frac{n \cdot 300°}{n} + \frac{360°}{n}$$

$$\varphi = \frac{n \cdot 60°}{n} + \frac{360°}{n}$$

$$\varphi = \frac{n \cdot 60° + 360°}{n}$$

$$\varphi = \frac{(n+6) \cdot 60°}{n}.$$



Slika 23: Geometrijska rožica, notranji kot večkotnika in središčni kot, ki pripada posameznemu cvetnemu listu (vir: avtor)

Dolžina krožnega loka nad tem središčnim kotom je enaka:

$$l = \frac{2\pi a\varphi}{360°}$$

$$l = \frac{\pi a\varphi}{180°}$$

$$l = \frac{\pi a \cdot \frac{(n+6)\cdot 60°}{n}}{180°}$$

$$l = \frac{\pi a(n+6)\cdot 60°}{n\cdot 180°}$$

$$l = \frac{\pi a(n+6)}{3n}.$$

Obseg n-listne rožice je tako:

$$o = n\cdot l$$

$$o = n\cdot\frac{\pi a(n+6)}{3n}$$

$$o = \frac{\pi a(n+6)}{3}.$$

In končno še količnik med obsegom rožice in pravilnim n-kotnikom, nad katerim rožica nastane:

$$\frac{\pi a(n+6)}{3} : na = \frac{\pi(n+6)}{3n}.$$

Da bi obseg rožice bil več kot dvakratnik obsega n-kotnika, mora ta količnik biti večji od 2:

$$\frac{\pi(n+6)}{3n} > 2$$

$$\pi(n+6) > 6n$$

$$\pi n + 6\pi > 6n$$

$$6n - \pi n < 6\pi$$

$$n(6-\pi) < 6\pi$$

$$n < \frac{6\pi}{6-\pi}$$

$$n < 6{,}59\ (\doteq 7)$$

S tem smo pokazali, da bo obseg rožice vsaj dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika, nad katerim je rožica nastala, le v primeru, ko bo število stranic večkotnika manjše od 7. Za rožice, ki nastanejo nad sedemkotnikom, osemkotnikom …, pa bo obseg rožice manj kot dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika v njeni sredini.

Ugotovili smo, da se količnik med obsegom rožice in obsegom pravilnega večkotnika, nad katerim rožica nastane, manjša. Z razmislekom hitro pridemo tudi do sklepa, da ta količnik ne more biti manjši od 1. Toda, ali bo ta količnik kdaj dosegel to skrajno vrednost?

Pravzaprav smo si na to že odgovorili, ko smo zapisali, da je količnik enak $\frac{\pi(n+6)}{3n}$. Ko bo število cvetnih listov (n) raslo prek vseh meja, se bo ta količnik približal $\frac{\pi}{3} \doteq 1{,}05$.

Preverimo še, kolikšna je razlika med dolžino krožnega loka n-listne in $(n+1)$-listne rožice, čeprav že vemo, da ni konstantna (kar smo predvideli ob začetku raziskovanja):

$$\frac{\pi a(n+6)}{3n} - \frac{\pi a(n+7)}{3(n+1)} =$$

$$\frac{\pi a(n+6)(n+1)}{3n(n+1)} - \frac{\pi a(n+7)n}{3n(n+1)} =$$

$$\frac{\pi a(n^2+7n+6) - \pi a(n^2+7n)}{3n(n+1)} =$$

$$\frac{\pi a(n^2+7n+6-n^2-7n)}{3n(n+1)} =$$

$$\frac{6\pi a}{3n(n+1)} =$$

$$\frac{2\pi a}{n(n+1)}.$$

Torej je sprememba dolžin krožnih lokov odvisna od večkotnikov, nad katerimi nastaneta geometrijski rožici (odvisna je torej od n) in večji kot je n, manjša je ta razlika.

Preglednica 1: Zbirnik podatkov o kotih in obsegih glede na število stranic pravilnega večkotnika, ki je v središču geometrijske rožice

n	φ	l	$o_{rožice}$	$o_{n-kotnika}$	$\frac{o_{rožice}}{o_{n-kotnika}}$
3	180°	πa	$3\pi a = \frac{9\pi a}{3}$	$3a$	$\pi \doteq 3{,}14$
4	150°	$\frac{5\pi a}{6}$	$\frac{10\pi a}{3}$	$4a$	$\frac{5\pi}{6} \doteq 2{,}62$
5	132°	$\frac{11\pi a}{15}$	$\frac{11\pi a}{3}$	$5a$	$\frac{11\pi}{15} \doteq 2{,}30$
6	120°	$\frac{2\pi a}{3}$	$4\pi a = \frac{12\pi a}{3}$	$6a$	$\frac{2\pi}{3} \doteq 2{,}10$
$\vdots$					
n	$\frac{(n+6)\cdot 60°}{n}$	$\frac{\pi a(n+6)}{3n}$	$\frac{\pi a(n+6)}{3}$	$n \cdot a$	$\frac{\pi(n+6)}{3n}$

Po izpisu preglednice smo opazili, da so zanimive razlike med obsegi $(n+1)$-listne in n-listne rožice. Kar iz preglednice se vidi, da je razlika med obsegom 4-listne in 3-listne rožice enaka:

$$\frac{\pi a}{3}.$$

In prav tolikšna je tudi razlika med obsegom 5-listne in 4-listne rožice, pa tudi med obsegom 6-listne in 5-listne rožice. Torej sumimo, da je razlika med obsegoma $(n+1)$-listne in n-listne rožice konstantna. Preverimo torej, ali je ta razlika tudi za $(n+1)$-listno in n-listno rožico enaka $\frac{\pi a}{3}$.

$$\frac{\pi a\big((n+1)+6\big)}{3} - \frac{\pi a(n+6)}{3} =$$

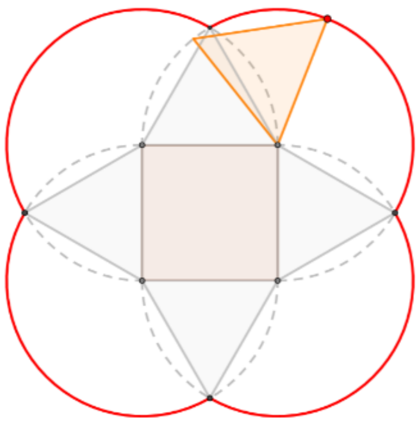
$$\frac{\pi a(n+7)}{3} - \frac{\pi a(n+6)}{3} =$$

$$\frac{\pi a(n+7-n-6)}{3} = \frac{\pi a}{3}.$$

Za razliko dolžin obsegov $(n+1)$-listne in n-listne rožice torej velja, da je konstantna.

6 ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo se osredotočili na obseg likov, ki nastanejo pod točno določenimi pogoji. Poimenovali smo jih geometrijske rožice, saj spominjajo na obliko rožice. Nastanejo tako, da se enakostranični trikotnik s stranico a zavrti okrog pravilnega večkotnika, katerega stranica je prav tako dolžine a. Pri tem s prostimi oglišči riše loke, ki smo jih imenovali tudi cvetni listi.



Slika 24: Štirilistna rožica (vir: avtor)

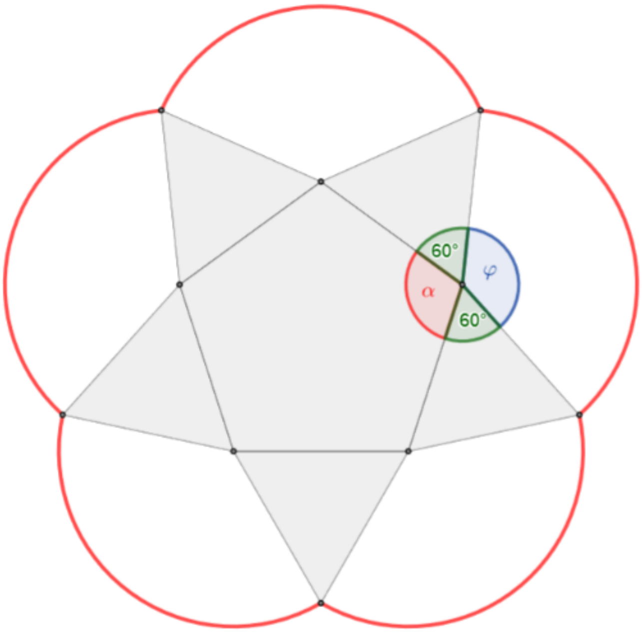
Želeli smo odkriti splošno formulo, s katero lahko izračunamo obseg takšnega lika, ne glede na vrsto pravilnega večkotnika, nad katerim nastane geometrijska rožica. Raziskovanje smo začeli s pravilnim (enakostraničnim) trikotnikom v sredini rožice, nadaljevali pa s pravilnim štirikotnikom (kvadratom), pa pravilnim petkotnikom, šestkotnikom ...

Sprva smo izračunali obseg 3-listne rožice, nato smo se lotili 4-listne, pa 5-listne in 6-listne rožice. Ob tem smo veliko razmišljali predvsem o tem, kako smo do posameznega obsega prišli, kaj so h končnemu rezultatu prispevali posamezni uporabljeni obrazci, ki smo jih končno združili v eno splošno formulo, s katero lahko izračunamo obseg n-listne rožice.

Pri vseh rožicah, ki smo jih raziskovali, smo najprej izračunali središčni kot posameznega cvetnega lista:

$$\varphi = 360° - (\alpha + 2 \cdot 60°).$$

Pri tem je α notranji kot pravilnega večkotnika, nad katerim nastaja rožica, vsak notranji kot enakostraničnih trikotnikov pa meri 60° (zato k α prištejemo $2 \cdot 60°$ in to vsoto odštejemo od 360°, saj kot je vidno tudi na sliki, kot φ s temi koti tvori polni kot).



Slika 25: 5-listna geometrijska rožica z označenimi koti, ki smo jih morali upoštevati pri računanju obsega te rožice (vir: avtor)

Z dobljenim središčnim kotom φ smo nato lahko izračunali dolžino krožnega loka:

$$l = \frac{\pi a(n+6)}{3n}.$$

Dolžino posameznega krožnega loka smo nato le pomnožili s številom cvetnih listov geometrijske rožice, to je n:

$$o = \frac{\pi a(n+6)}{3}.$$

Naše raziskovanje se je začelo z zastavitvijo raziskovalnega vprašanja in kmalu je sledilo tudi postavljanje hipotez. Končno smo oblikovali tri hipoteze, od katerih smo dve ovrgli, eno pa potrdili.

S primerjavo središčnih kotov pri 3-, 4- in 5-listnih geometrijskih rožicah smo potrdili, da je središčni kot, ki mu pripada posamezni krožni lok, tem manjši, čim večje je število stranic pravilnega n-kotnika, nad katerim nastaja geometrijska rožica. Dolžina krožnega loka pa je odvisna od tega kota. Torej je dolžina krožnega loka odvisna od pravilnega večkotnika, nad katerim nastaja geometrijska rožica. S tem je potrjena naša hipoteza 2, ki pravi: *»Dolžina krožnega loka (od katerega je odvisen obseg geometrijske rožice) je odvisna od pravilnega večkotnika, nad katerim nastaja geometrijska rožica.«*

Naša hipoteza 1 je predvidela, da bo obseg rožice vsaj dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika v sredini. To hipotezo smo ovrgli, saj smo ugotovili, da bo obseg rožice vsaj dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika, nad katerim je rožica nastala, le v primeru, ko bo število stranic večkotnika manjše od 7. Za rožice, ki nastanejo nad sedemkotnikom, osemkotnikom …, pa bo obseg rožice manj kot dvakrat tolikšen kot obseg pravilnega večkotnika v njeni sredini. Izkazalo se je tudi, da količnik med obsegom rožice in obsegom pravilnega večkotnika, nad katerim rožica nastaja, nikoli ne bo manjši od $\frac{\pi}{3}$.

V hipotezi 3 smo predpostavili, da bo sprememba dolžine krožnega loka med n-kotnikom in $(n+1)$-kotnikom konstantna. To hipotezo smo morali ovreči, saj je sprememba dolžine krožnega loka med n-listno in $(n+1)$-listno rožico odvisna od n. Izkaže se, da večji kot je n, manjša je razlika med dolžinama krožnih lokov n-listne in $(n+1)$-listne rožice, saj velja:

$$\frac{2\pi a}{n(n+1)}.$$

Ugotovili pa smo, da je razlika obsegov $(n+1)$-listne in n-listne rožice konstantna in je enaka:

$$\frac{\pi a}{3}.$$

Ob koncu raziskovanja smo dobili odgovore na svoja raziskovalna vprašanja, odprlo pa se je tudi nekaj idej, kaj raziskovati v prihodnje. Ena od idej je primerjava ploščin geometrijskih rožic.

Veseli smo, da smo se raziskovalne naloge lotili, a si na začetku niti slučajno nismo predstavljali, kako zelo bo oteženo naše delo zaradi svetovne pandemije in odločitve, da se naše šolanje v tem šolskem letu v pretežni meri izvaja na daljavo.

7 VIRI

Berk J., Draksler J., Robič M.

Skrivnosti števil in oblik 8 (2. izdaja). Ljubljana, Rokus Klett, 2013.

Tratar, J., Mahnič, B., Lešnik, V., Štaher, A., Pev, M., Miklavčič Jenič, A., Hauptman, A. in Tadina Bence, V. (2014).

Matematika 7 – i-učbenik za matematiko v 7. razredu osnovne šole. V Senekovič, J. (ur.). *Ljubljana:* Zavod RS za šolstvo, [datum ogleda: 10. 10. 2020].

Dostopno na: https://eucbeniki.sio.si/index.html

Triangels and petals (problem). Na: NRICH [online], Univesity of Cambridge, [datum ogleda: 3. 9. 2020]. Dostopna na: https://nrich.maths.org/2095