"55. srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2021"

Osnovna šola Janka Padežnika Maribor,

Iztokova 6, 2000 Maribor

UGASNIMO LUČI

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

Mentorici:

Mateja Slana Mesarič

Bernarda Slodnjak Pernek

Avtorja:

Naja Bokan

Žana Kralj

Maribor, 2021

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO GRAFOV

POVZETEK

Med pripravami na tekmovanje iz logike smo se poleg reševanja 'resnih' nalog tudi igrali. Igrali smo miselne igre, kot so minolovec, križec krožec, štiri v vrsto, stikala in podobno.

Učiteljica nam je povedala, da ima vsaka od teh iger tudi matematično ozadje, kar je bilo za nas 'novo odkritje', saj smo do sedaj igrali te igre brez matematičnega razmišljanja. Ker nam je največ težav povzročala igra stikala, ki deluje v mreži *n* x *n* prižganih polj, kjer s stikalom ugašaš luči tako, da ob izbiri polja ugasne luč na tem polju in vseh nediagonalnih poljih ob njem, smo se odločili, da to igro raziščemo.

Zanimalo nas je, kakšno je najmanjše število potez na poljih *3 x 3*, *4 x 4* in *5 x 5*, da se ugasnejo luči na vseh poljih, ali obstaja najmanjše število potez za rešitev in kako bi te ugotovitve generalizirali na polje *n x n*.

KLJUČNE BESEDE: matematika, igra, mreža polj, kongruence, kombinatorika, rešitve igre

ABSTRACT

During the preparations for the competition in logic, in addition to solving "serious" tasks, we also played. We played mind games, minesweeper, cross circle, four in a row, switches and alike.

The teacher told us that each of these games also has a mathematical background, which was a “new discovery” for us, as we have played these games without mathematical thinking so far. Since we were most troubled by the game of the switch, which operates in a network of *n x n* lit fields, where you turn off the lights with the switch so that when you select a field, the light goes out on this field and on all non-diagonal fields next to it, we decided to explore this game.

During the game, we were interested in what the minimum number of moves on the *3x3*, *4x4* and *5x5* field is to turn off the lights on all fields, or is there a minimum number of moves to solve and how to generalize these findings to the field *n x n*.

KEY WORDS: mathematics, game, network of fields, congruence, combinatorics, game solutions

UVOD

Niso vse računalniške igre slabe, kot nekateri pravijo. Igra *ugasnimo luči* ima matematično ozadje in ob reševanju krepimo logično razmišljanje. Na pogled je igra podobna osvetljeni križanki, vendar v mrežo ne vpisujemo črk, temveč je naš cilj, da ugasnemo vsa polja. Ni nujno, da jo igramo na računalniku, ker obstaja tudi elektronska ročna igra *Lights out*.

Ljudje to igro poznajo pod drugim imenom, zato ni tako priljubljena, večkrat pa jo najdemo kot del katere druge igre.

Menimo, da bi se lahko sproščali tudi ob igrah, kjer moramo biti miselno zelo aktivni in je pomembno imeti mnogo spretnosti in iznajdljivosti, če rešitve ne določimo z računanjem.

1.1 Raziskovalni problem

V raziskovalni nalogi bomo raziskali, ali učenci in starejši poznajo to igro, jo radi igrajo in ali jo tudi znajo rešiti, torej ugasniti luči na vseh poljih v različnih kvadratnih mrežah.

Poskušali bomo ugotoviti, ali obstaja točno določeno število možnih stiskov z najmanj koraki v določeni mreži, nato pa bomo proučili te korake stiskov na polja, ali jih je več, če je mreža večja in ali je pri stiskanju pomemben vrstni red ali pa je ta lahko zgolj naključen.

Poskusili bomo najti rešitve z najmanj koraki za različne velikosti mrež, opredelili pa se bomo le na kvadratne mreže, torej s polji *n x n*, kjer so na začetku igre vedno luči prižgane, na koncu pa ugasnjene.

1.2 Hipoteze

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Glede na naša raziskovalna vprašanja smo si zastavili naslednje hipoteze:

Igra ostalim ni znana pod tem imenom.

Starejši igro bolje poznajo kot mlajši.

Igralci igro v mreži *3 x 3* vedno začnejo s *poljem a* ali pa s srednjim *poljem e.*

V primeru dvakratnega stiska na eno polje ne dobiš začetne situacije.

Obstaja točno določeno število rešitev, da ugasneš vse luči.

Večja kot je mreža, več je možnih rešitev.

Najprej se igra v polju *3 x 3*, ker je znano, da je v tej mreži lažje priti do rešitve.

2 TEORETIČNE OSNOVE

2.1 Zgodovina igre

Igra ugasnimo luči, v originalu Lights Out, je popolnoma elektronska igra in nima predhodnice med družabnimi igrami. Leta 1995 jo je izdelala družba Tiger Electronics.

Predhodnik igre je bil Merlin, igralna konzola, ki jo je v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja izdelalo podjetje Parker Brothers. Konzola je bila namenjena igri na polju *3 x 3*.

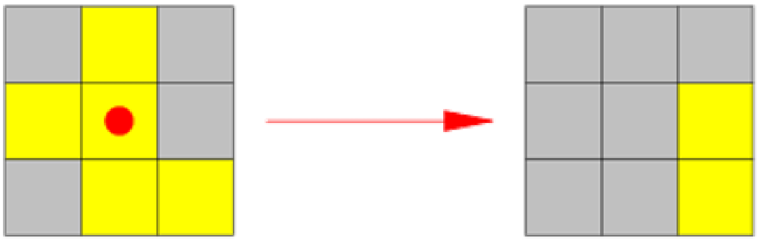
Slika 1: Konzola za igranje igre (Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Merlin_(console))

Igra spada med skupino iger, ki so namenjene enemu igralcu, in je namenjena preganjanju dolgčasa, prav tako pa predstavlja dober trening za možgane.

2.1.1 Pravila

Igro igra ena oseba, in sicer na pravokotni rešetki svetilk, ki jih je mogoče vklopiti in izklopiti.

Igra se igra na mreži *n x n*, na kateri so svetilke, ki jih s pomočjo stikala s klikom na izbrano polje vklopimo ali izklopimo. Premikamo se z obračanjem stikala znotraj enega od kvadratov, s čimer se preklopi stanje vklopa/izklopa tega in njegovih štirih nediagonalnih sosednjih polj.



Slika 2: Predstavitev igre z ugašanjem luči v poljih **(**Vir: https://mathworld.wolfram.com/LightsOutPuzzle.html)

Igra se začne z naključno izbranim poljem, cilj pa je, da s čim manj potezami ugasnemo vse luči.

2.1.2 Problem

Problem ugotavljanja, ali je mogoče začeti od niza vseh prižganih luči do vseh ugasnjenih luči, je znan kot 'problem vseh'. Kot je pokazal Sutner (1989), je to pri kvadratni rešetki (Rangel-Mondragon) vedno mogoče.

2.1 Matematika v igri

2.1.1 Kongruence

Kongruenca je ekvivalenčna relacija, kar predstavlja odnos med dvema celima številoma pod določenimi pogoji.

Uporabna je v nalogah, kjer ugotavljamo ostanek pri deljenju z nekim številom, in pri dokazovanju deljivosti.

Celi števili $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$ sta po definiciji kongruentni po modulu $\boldsymbol{m}$ (ki je naravno število) natanko tedaj, ko $\boldsymbol{m}$ deli razliko števil $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$.

Z znaki lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{m} \in \mathbb{N},\ \ \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{mod}(\boldsymbol{m}) \iff \boldsymbol{m} |\, (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$

Število $\boldsymbol{b}$ je torej ostanek pri deljenju števila $\boldsymbol{a}$ s številom $\boldsymbol{m}$ in velja:

$$\boldsymbol{b} \,\boldsymbol{\epsilon} \{\, \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}, \dots, (\boldsymbol{m} - \mathbf{2}),\ (\boldsymbol{m} - \mathbf{1})\}.$$

Če razširimo to relacijo na dve poljubni celi števili, potem je lahko b celo število, to pomeni, da je lahko tudi b negativno število in velja:

$$\boldsymbol{b} \,\boldsymbol{\epsilon} \{-(\boldsymbol{m} - \mathbf{1}), -(\boldsymbol{m} - \mathbf{2}), \dots, -\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}, (\boldsymbol{m} - \mathbf{2}),\ (\boldsymbol{m} - \mathbf{1})\}.$$

Kongruenca je ekvivalenčna relacija, saj veljajo lastnosti:

- refleksivnost: $a \equiv a\ mod(m)$,
- simetričnost: $a \equiv b\ mod(m) \Longrightarrow b \equiv a\ mod(m)$,
- tranzitivnost: $a \equiv b\ mod(m) \wedge b \equiv c\ mod(m) \Longrightarrow a \equiv c\ mod(m)$.

Pri računanju s kongruencami veljajo naslednje lastnosti, kjer za vse primere velja

$$\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{mod}(\boldsymbol{m})\ \boldsymbol{in}\ \boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{d}\, \boldsymbol{mod}(\boldsymbol{m}):$$

SEŠTEVANJE KONGRUENC:

$$\boldsymbol{a + c \equiv b + d \; mod(m),}$$

MNOŽENJE KONGRUENC:

$$\boldsymbol{a \cdot c \equiv b \cdot d \; mod(m),}$$

MNOŽENJE KONGRUENC S CELIM ŠTEVILOM:

$\boldsymbol{a \cdot z \equiv b \cdot z \;\; mod(m)}$ **kjer je** $\boldsymbol{z \in \mathbb{Z},}$

POTENCIRANJE KONGRUENC:

$$\boldsymbol{a \equiv a \; mod(m) \Rightarrow a^n \equiv b^n \; mod(m), n \in \mathbb{N}_0.}$$

2.1.2 Kombinatorika

″Kombinatorika je veja matematike, ki se ukvarja s preštevanjem možnih razporeditev elementov dane končne množice.″ Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta (Šparovec, Kavka, Pavlič, Rugelj, 2009, stran 62):

″Če je proces odločanja sestavljen iz k zaporednih faz in je v prvi fazi možnih n_1 odločitev, v drugi fazi n_2 odločitev…, v k-ti fazi n_k odločitev, število izborov v posamezni fazi pa je neodvisno od tega, katere možnosti so bile izbrane v prejšnjih fazah, potem je število vseh sestavljenih odločitev produkt vseh odločitev v posameznih fazah:

$$\boldsymbol{N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} \;\; ″$$

3 OSREDNJI DEL NALOGE

3.1 Metodologija

Uporabili smo naslednje metode dela:

- metodo proučevanja pisnih virov
- metodo poskušanja
- metodo anketiranja
- metodo analize podatkov in njihovo interpretacijo

3.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov

Začetna metoda dela je bila metoda dela s pisnimi viri. Literaturo smo poiskali na spletu in kasneje v šolski knjižnici ter osebnih knjižnicah. Zbrane materiale smo proučili, prebrali in se pogovorili. Ugotovitve smo povzeli in uskladili.

3.1.2 Metoda poskušanja

To metodo smo uporabili v osrednjem delu raziskave. Igro smo igrali ter beležili število potez, ki smo jih napravili. Metoda je bolj primerna za raziskovanje na manjših poljih.

Uporabili smo jo tudi za preizkušanje rešitev med izračunanimi možnimi rešitvami.

3.1.3 Metoda anketiranja

S pomočjo mentoric smo oblikovali anketni vprašalnik za učence in odrasle. Vseboval je vprašanja zaprtega tipa in odprtega tipa.

Vsi vprašalniki se nahajajo v poglavju Priloge.

3.1.4 Metoda analize podatkov in njihova interpretacija

Zbrane podatke o rezultatih igranja igre smo pregledali, jih uredili, analizirali in podali ugotovitve. Za prikaz smo uporabljali osebni računalnik in program Microsoft Word.

3.2 Opis rezultatov - potek raziskovanja

Pri raziskovanju smo se omejili le na kvadratne mreže, najprej na dimenzije *3 x 3*, nato na *4 x 4*, *5 x 5* in na podlagi teh razmislili, kako je pri večjih kvadratnih mrežah *n x n.*

Polja v mrežah smo zaradi lažjega poteka raziskovanja označili z zaporednimi črkami brez šumnikov, kar pomeni:

v mreži *3 x 3*:

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

v mreži *4 x 4*:

a	**b**	**c**	**d**
e	**f**	**g**	**h**
i	**j**	**k**	**l**
m	**n**	**o**	**p**

v mreži *5 x 5*:

a	**b**	**c**	**d**	**e**
f	**g**	**h**	**i**	**j**
k	**l**	**m**	**n**	**o**
p	**r**	**s**	**t**	**u**
v	**z**	**x**	**y**	**q**

Igra se začne z vsemi prižganimi polji, ki jih označimo z L, in konča, ko so vsa polja ugasnjena, kar označimo z X.

Prvotno stanje v mreži 3 x 3 je torej

L	L	L
L	L	L
L	L	L

, končno pa

X	X	X
X	X	X
X	X	X

Po pravilu igranja igre smo poskušali in zapisali stanja določenih vrst polj ob pritisku nanj.

Vedno se ugasne to polje, na katerega stisnemo, in vsa nediagonalna sosednja polja, torej polja, ki se tega s celotnimi stranicami dotikajo.

- ob pritisku na polje v vogalu mreže je stanje:

X	X	L
X	L	L
L	L	L

- ob pritisku na polje v sredini mreže je stanje:

L	X	L
X	X	X
L	X	L

- ob pritisku na polje ob robu, a ne na vogalu mreže, je stanje:

X	X	X
L	X	L
L	L	L

Ko smo raziskovali, smo polja označevali glede na stisk nanj ali ne:

0 - polje, če nanj ne pritisnemo,

1 - polje, če nanj pritisnemo.

Tako smo ugotovili, da so možnosti na vseh poljih le 0 ali 1.

Če smo imeli več potez, smo zaporedje stiskov zapisali:

$0+0=0$, $0+0+0=0$, $0+0+0+0+0=0$,

$1+1=0$, $1+1+1+1=0$, $1+1+1+1+1+1=0$,

$1+0=1$, $0+1=1$, $1+0+0=1$, $0+1+1+1=1$, $1+0+1+0=0.$

Te ugotovitve smo združili z računanjem kongruenc po modulu 2:

$a \equiv b\ mod(2)$, kjer je $b \in \{-1, 0, 1\}$,

če smo za b upoštevali še možna negativna cela števila.

Zapisali smo, da velja**:**

$$\mathbf{0 \equiv 0}\ \boldsymbol{mod}(\mathbf{2}).$$

Če upoštevamo množenje potenc s celim številom $k \in \mathbb{Z}$, potem velja:

$$\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{0 \equiv 0}\ \boldsymbol{mod}(\mathbf{2}).$$

S tem smo pokazali, da če na polje ne stisnemo, ostane svetilnost nespremenjena.

Zapisali smo, da velja:

$$\mathbf{1 \equiv 1}\ \boldsymbol{mod}(\mathbf{2}).$$

Če upoštevamo množenje potenc s celim številom $k \in \mathbb{Z}$, potem velja:

$\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{1 \equiv 1}\ \boldsymbol{mod}(\mathbf{2})$**, če je k liho število in**

$\boldsymbol{k} \cdot \mathbf{1 \equiv 0}\ \boldsymbol{mod}(\mathbf{2})$**, če je k sodo število.**

Torej lahko zapišemo končno ugotovitev:

če stisnemo na polje **lihokrat**, je ista situacija, kot če bi stisnili le 1-krat, če pa stisnemo na polje **sodokrat**, pa nastane ista situacija, kot če sploh ne bi stisnili na to polje.

Kasneje nas je zanimalo, ali je vrstni red stiskov na polje pomemben.

Zato smo zapisali veljavne kongruence:

$1+1 \equiv 0\ mod(2)$, $1 \equiv -1\ mod(2)$, $1 \equiv 1\ mod(2)$, $0 \equiv 0\ mod(2)$ …, torej smo posplošili:

$$\boldsymbol{a \equiv -a\ mod(2).}$$

Zapisali smo zaporedje stiskov na polje ter s poskušanjem ugotovili, da **vrstni red ni pomemben,** ter uporabili znanje kongruenc, da smo to potrdili:

$0+1 \equiv 1\ mod(2)$, $\quad 1+0 \equiv 1\ mod(2)$,

$0+1+1 \equiv 0\ mod(2)$, $1+0+1 \equiv 0\ mod(2)$, $1+1+0 \equiv 0\ mod(2)$ …

Kasneje nas je zanimalo, ali bi lahko izračunali rešitve z najmanjšim številom stiskov na polja in ne samo poskušali rešitev najti.

Pri igranju igre smo iz izbire stiskov na polja v prvi vrstici ugotovili, na katera polja moramo pritisniti v naslednjih vrsticah, zato smo raziskali in zapisali odvisnost polj.

Upoštevali smo definicijo in lastnosti kongruenc:

$$a \equiv -a\ mod(2), \qquad 1 \equiv -1\ mod(2).$$

Rešitve z najmanj možnimi stiski na polja bi lahko natančno izračunali, a nam je zaradi premalo matematičnega znanja bilo onemogočeno.

Zato smo v okviru naših računskih zmožnosti po zapisu neodvisnih polj s pomočjo pravila produkta kombinatorike izračunali možne rešitve z najmanj stiski na polja, nato pa smo te rešitve s poskušanjem preverili za vsako mrežo posebej in dobili zapisane pravilne rešitve.

3.2.1 Mreža 3 x 3

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

Najprej smo raziskali odvisnost polj od polj prve vrstice, kjer smo upoštevali pravilo, katera polja so ob pritisku povezana.

Če stisnemo na *polje a*, velja:

$\boldsymbol{a + b + d \equiv 1\ mod(2)}$, ker je $\boldsymbol{1 + 0 + 0 \equiv 1\ mod(2)}$.

Potem sledi: $\boldsymbol{a + b + 1 \equiv d\ mod(2)}$.

Če stisnemo na polje b, velja:

$\boldsymbol{a + b + c + e \equiv 1\ mod(2)}$, ker je $\boldsymbol{0 + 1 + 0 + 0 \equiv 1\ mod(2)}$.

Potem sledi: $\boldsymbol{a + b + c + 1 \equiv e\ mod(2)}$.

Če stisnemo na polje c, velja:

$\boldsymbol{b + c + f \equiv 1\ mod(2)}$, ker je $\boldsymbol{0 + 1 + 0 \equiv 1\ mod(2)}$.

Potem sledi: $\boldsymbol{b + c + 1 \equiv f\ mod(2)}$.

Če stisnemo na polje d, velja:

$\boldsymbol{a + d + g + e \equiv 1\ mod(2)}$, ker je $\boldsymbol{0 + 1 + 0 + 0 \equiv 1\ mod(2)}$.

Upoštevali smo zapis polj d in e in dobili $\boldsymbol{a+a+b+1+g+a+b+c+1 \equiv 1\, mod(2)}$

$\boldsymbol{3a+2b+c+g+2 \equiv 1\, mod(2)}$ in z upoštevanjem lastnosti kongruenc smo zapisali:

$\boldsymbol{a+c+1 \equiv g\, mod(2)}$.

Če stisnemo na polje e, velja:

$\boldsymbol{d+e+b+f+h \equiv 1\, mod(2)}$, ker je $\boldsymbol{0+1+0+0+0 \equiv 1\, mod(2)}$.

Upoštevali smo zapis polj d, e, in f in dobili

$\boldsymbol{a+b+1+a+b+c+1+b+b+c+1+h \equiv 1\, mod(2)}$, nato

$\boldsymbol{2a+4b+2c+h+3 \equiv 1\, mod(2)}$ in z upoštevanjem lastnosti kongruenc smo zapisali:

$\boldsymbol{0 \equiv h\, mod(2)}$.

Če stisnemo na polje f, velja:

$\boldsymbol{c+e+f+i \equiv 1\, mod(2)}$, ker je $\boldsymbol{0+0+1+0 \equiv 1\, mod(2)}$.

Upoštevali smo zapis polj e in f in dobili $\boldsymbol{c+a+b+c+1+b+c+1+i \equiv 1\, mod(2)}$, nato $\boldsymbol{a+2b+3c+2 \equiv 1\, mod(2)}$ in z upoštevanjem lastnosti kongruenc smo zapisali:

$\boldsymbol{a+c+1 \equiv i\, mod(2)}$.

Ugotovili smo, da lahko krajše zapišemo odvisnost polj:

polja, ki ob stisku na določeno polje spremenijo svetilnost, seštejemo ter zapišemo, da je kongruentno 1 po modulu 2, kar smo izpeljali pri vsakem polju posebej.

Tako smo v mrežo zapisali odvisnost polj:

a	b	c
a+b+1	a+b+c+1	b+c+1
a+c+1	0	a+c+1

Ugotovili smo, da so v tej mreži le 3 neodvisna polja, eno konstantno in 5 odvisnih polj od teh v prvi vrstici.

Ker je polje h enako 0, izbiramo le tri polja a, b in c.

Vsako ima dve možnosti $\boldsymbol{a, b, c} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Zato je možnih rešitev z najmanj stiski na polja po pravilu produkta: $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 = 8}$.

Tako smo lahko zapisali 8 možnih rešitev:

0	0	0
1	1	1
1	0	1

1	1	1
1	0	1
1	0	1

1	0	0
0	0	1
0	0	0

0	1	0
0	0	0
1	0	1

0	0	1
1	0	0
0	0	0

1	1	0
1	1	0
0	0	0

0	1	1
0	1	1
0	0	0

1	0	1
0	1	0
1	0	1

S poskušanjem smo preverili in ugotovili, da je le zadnja rešitev pravilna, torej je pravilna rešitev z najmanj stiski na polja le ena:

1	0	1
0	1	0
1	0	1

3.2.2 Mreža 4 x 4

a	**b**	**c**	**d**
e	**f**	**g**	**h**
i	**j**	**k**	**l**
m	**n**	**o**	**p**

Najprej smo raziskali odvisnost polj od prve vrstice, kjer smo upoštevali pravilo, katera polja so ob pritisku povezana. Upoštevali smo krajši zapis povezave polj in dobili zapis v tabeli:

a	b	c	d
a+b+1	**a+b+c+1**	**b+c+d+1**	**c+d+1**
a+c+1	**d**	**a**	**b+d+1**
b+c+d+1	**a+b+d+1**	**a+c+d+1**	**a+b+c+1**

Opazili smo, da so v tej mreži le 4 neodvisna polja, kjer sta dva para enakih in 10 odvisnih polj od teh v prvi vrstici.

Ker sta polji j in k enaki dvema v prvi vrstici, izbiramo le štiri polja a, b, c in d.

Vsako ima dve možnosti $\boldsymbol{a, b, c, d} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Zato je možnih rešitev z najmanj stiski na polja po pravilu produkta $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16}$.

Tako smo lahko zapisali vseh 16 možnih rešitev:

0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**

0	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**

1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**

0	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**

1	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**0**

1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**

0	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**

0	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**

1	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**

1	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**

1	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**

0	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**

1	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**

0	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

0	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**

1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**

Preverili smo s poskušanjem in ugotovili, da je vseh 16 pravilnih rešitev z najmanjšim številom stiskov na polja.

3.2.3 Mreža 5 x 5

a	**b**	**c**	**d**	**e**
f	**g**	**h**	**i**	**j**
k	**l**	**m**	**n**	**o**
p	**r**	**s**	**t**	**u**
v	**z**	**x**	**y**	**q**

Najprej smo raziskali odvisnost polj od prve vrstice, kjer smo upoštevali pravilo, katera polja so ob pritisku povezana. Upoštevali smo krajši zapis povezave polj in dobili zapis v tabeli:

a	**b**	**c**	**d**	**e**
a+b+1	**a+b+c+1**	**b+c+d+1**	**c+d+e+1**	**d+e+1**
a+c+1	**d**	**a+e**	**b**	**c+e+1**
b+c+d+1	**a+b+d+e+1**	**a+c+e**	**a+b+d+e+1**	**b+c+d+1**
e	**d+1**	**c+1**	**b+1**	**a**

Opazili smo, da je v tej mreži le 9 neodvisnih polj, kjer se nekatera ponovijo, in 16 odvisnih polj od teh v prvi vrstici.

Ker so nekatera polja enaka poljem v prvi vrstici, izbiramo le pet polj a, b, c, d in e.

Vsako ima dve možnosti $\boldsymbol{a, b, c, d, e} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Zato je možnih rešitev z najmanj stiski na polja po pravilu produkta $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32}$.

Tako smo zapisali vseh 32 možnih rešitev in s preverjanjem in poskušanjem ugotovili, da so le 4 pravilne rešitve z najmanjšim številom stiskov na polja:

1	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**

0	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**

1	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**

0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

3.2.4 Polje n x n

Po zapisih večjih mrež menimo, da je v tej mreži vsaj *n* neodvisnih polj, kjer se nekatera ponovijo.

Ker so nekatera polja enaka poljem v prvi vrstici, izbiramo le *n* polj a, b, c, d … in n.

Vsako ima dve možnosti $a, b, c, d, e, \ldots, n \in \{0,1\}$.

Zato je možnih rešitev z najmanj stiski na polja po pravilu produkta $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots = 2^n$.

Tako je nemogoče zapisati vse možnie rešitve za velike mreže in preveriti vse rešitve.

Pri tem bi zagotovo potrebovali za izračun še kakšen nov način izračuna, ki ga nismo uporabili, zato pri velikih mrežah le povzamemo ugotovitve od manjših.

3.3. Opis rezultatov anket

Interpretacija grafov

Pri raziskovalni nalogi smo pripravili anketni vprašalnik za otroke in za odrasle. Odgovore smo grafično predstavili.

Anketo je rešilo 55 odraslih in 102 učenca od 6. do 9. razreda, torej skupaj 157 oseb.

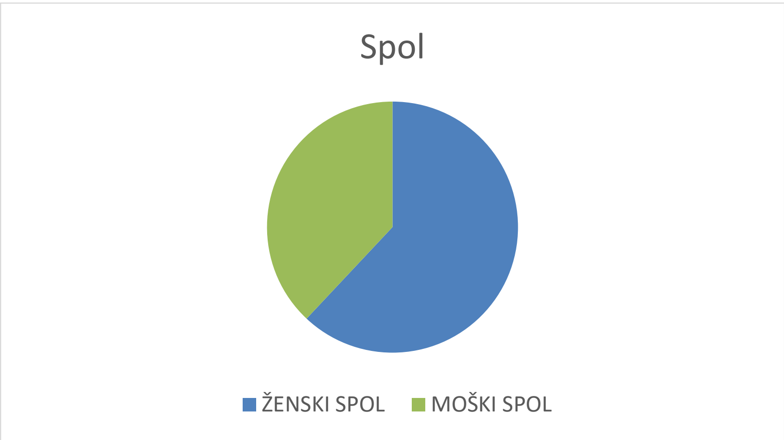
Rezultati so predstavljeni z grafi, ki predstavljajo odgovore na določena vprašanja, kjer so številčni podatki podani v odstotkih.

1. Označite spol.

Število učencev: 102

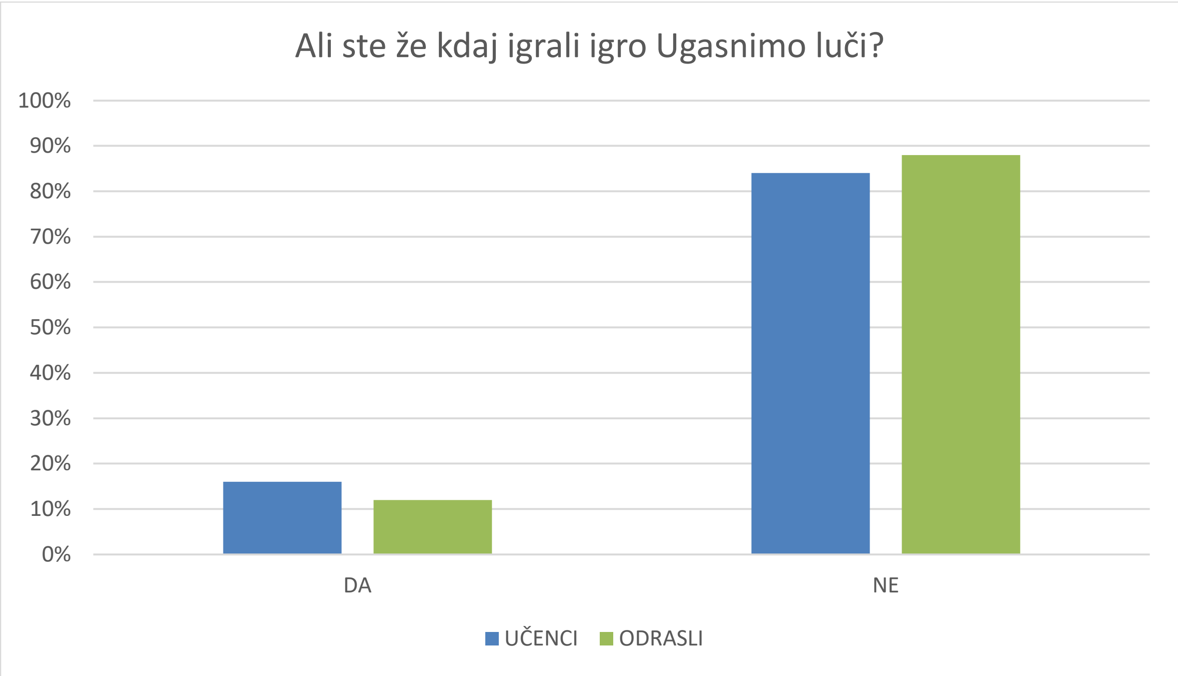
Število odraslih: 55

Graf 1: Spol



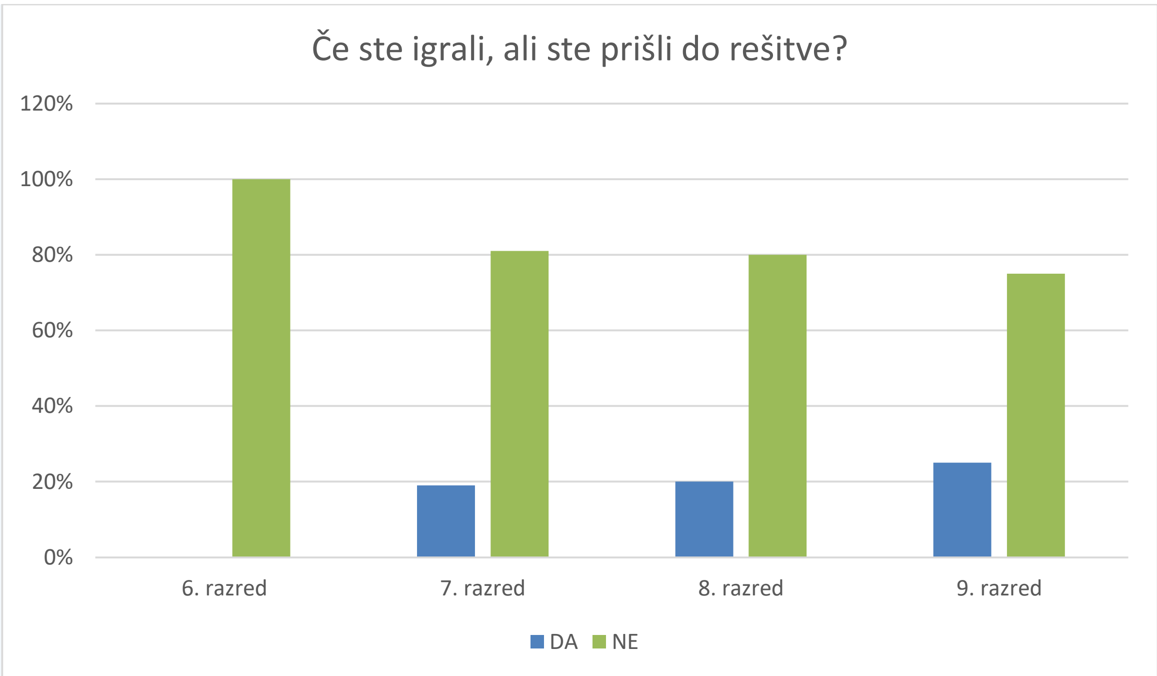
Večina anketiranih je bilo ženskega spola (62 %).

Graf 2: Ali ste že kdaj igrali igro ugasnimo luči ali kakšno podobno?



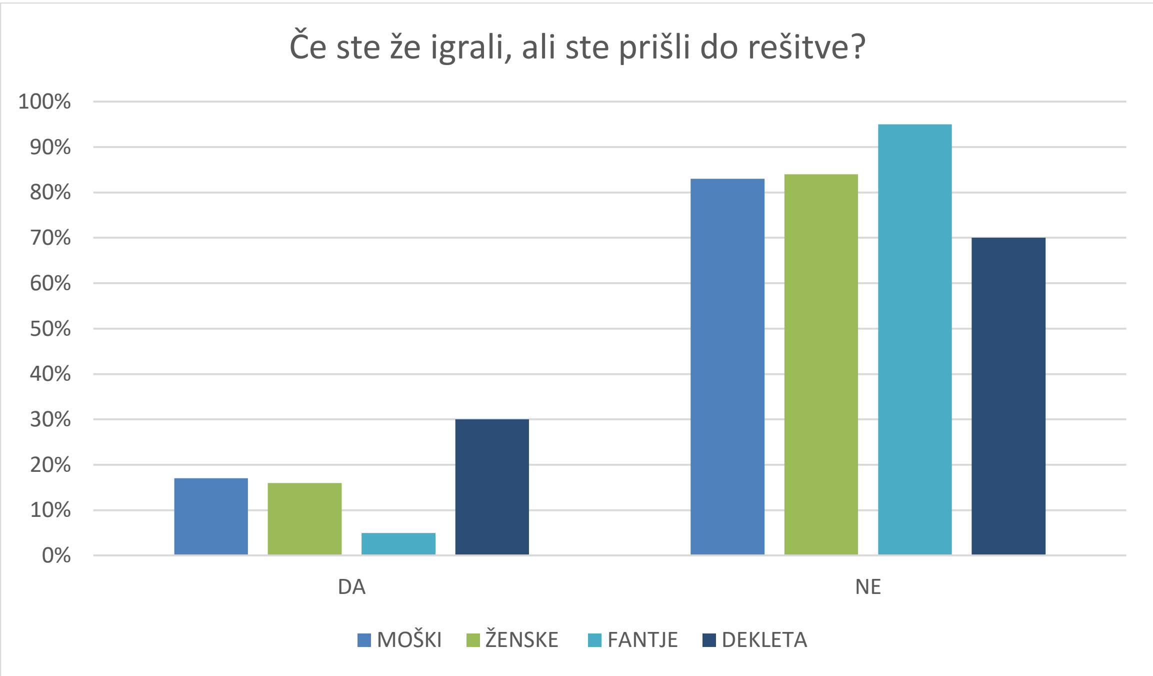
Iz grafa je razvidno, da večina učencev (84 %) in odraslih (88 %) še ni igrala te igre.

Graf 3: Ali so učenci prišli do rešitve glede na razred, ki ga obiskujejo?



Anketni vprašalnik je pokazal, da vsi šestošolci niso prišli do rešitve (100 %), večina sedmošolcev tudi ni prišla do rešitve (81 %) – uspelo pa je 19 %, večina osmošolcev ni prišla do rešitve (80 %), prišlo pa jih je 20 %, večina devetošolcev ni prišla do rešitve (75 %), 25 % pa je uspelo. Največ učencev je do rešitve prišlo v devetem razredu.

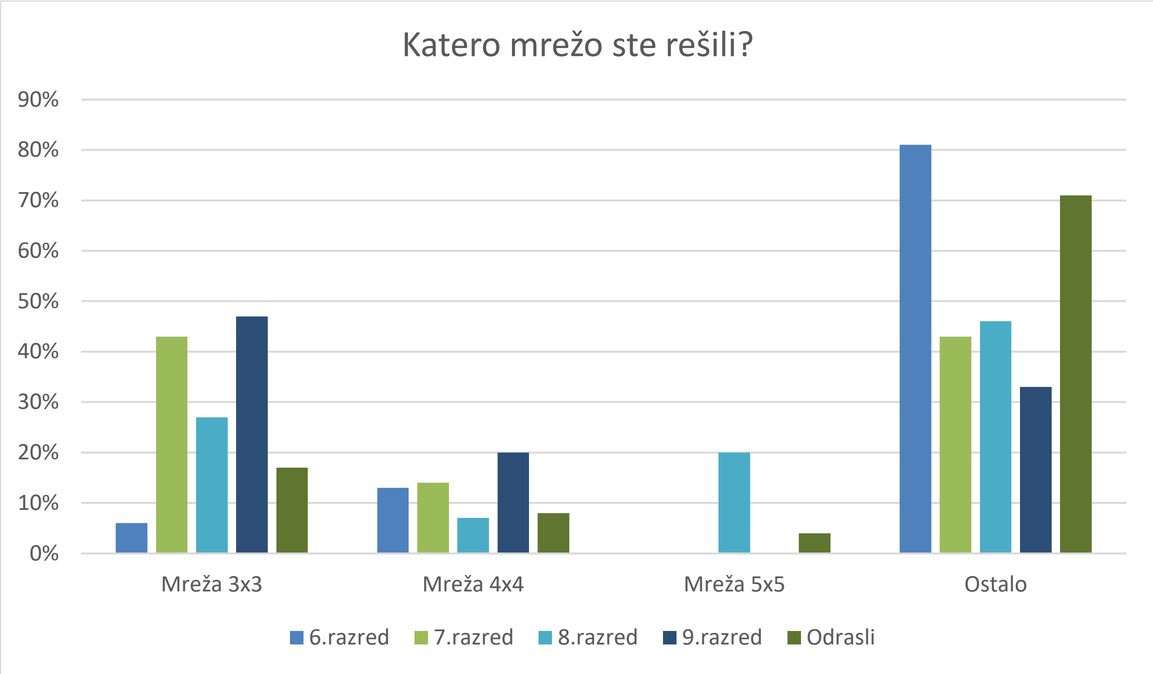
Graf 4: Ali so prišli učenci in odrasli do rešitve glede na spol?



Iz grafa je razvidno, da je 17 % moških do rešitve prišlo, žensk 16 %, fantov le 5 % in deklet 30 %. Do rešitve je prišlo največ deklet in najmanj fantov, pri odraslih pa je bilo uspešnost reševanja skoraj neodvisna od spola.

Pri neuspešnosti so vodili fantje, saj jih 95 % ni uspelo priti do rešitve, pri odraslih je bilo približno enako 83 % moških in 84 % žensk, najmanj neuspešna pri reševanju pa so bila dekleta 70 %.

Graf 5: Katero mrežo so rešili učenci glede na razred in katero odrasli?



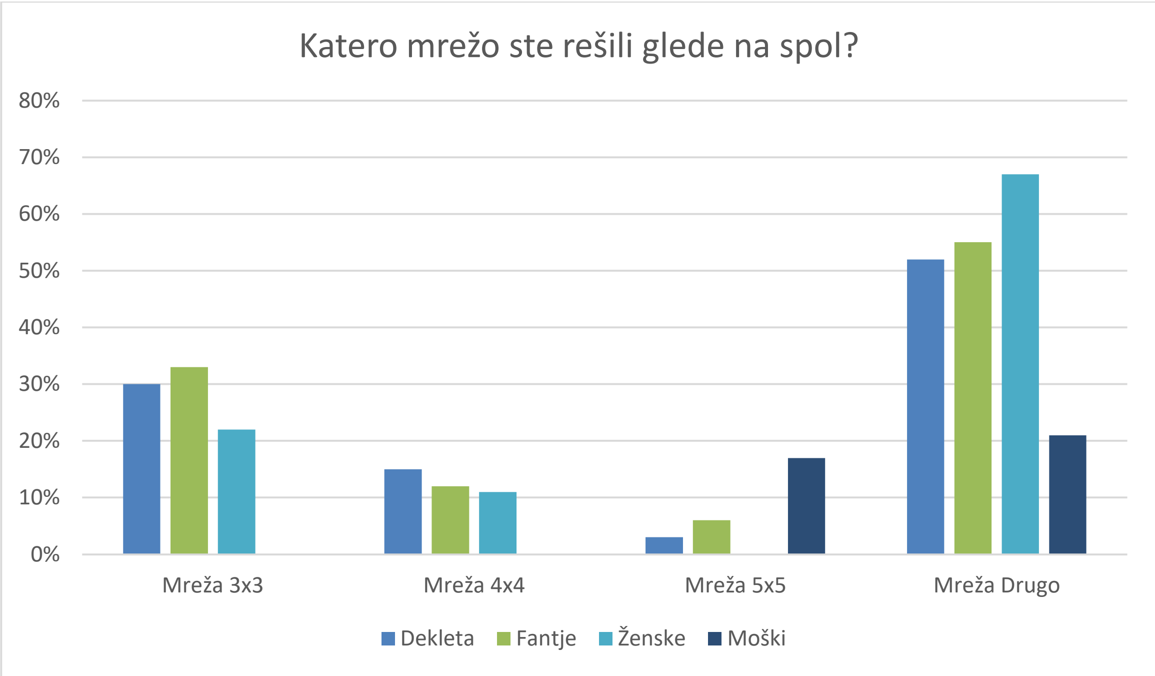
Mrežo 3 x 3 in 4 x 4 je rešilo največ devetošolcev (47 % in 20 %), takoj za njimi pa so sledili sedmošolci (43 % in 14 %).

Šestošolci so bili v reševanju mreže 3 x 3 najmanj številčni (6 %), pri mreži 4 x 4 pa že boljši (13 %).

Odrasli so bili z večanjem mreže vedno manj uspešni, vendar pri mreži 5 x 5 bolj uspešni kot 6., 7. in 9. razred. Pri 3 x 3 je bilo tako uspešnih 17 % odraslih, pri 4 x 4 samo 8 % in pri 5 x 5 le 4 %.

Osmošolci so bili najbolj uspešni pri reševanju mreže 5 x 5 mreže, in sicer kar v 20 %, pri 3 x 3 so bili manj uspešni (27 %) in pri 4 x 4 le v 7 %.

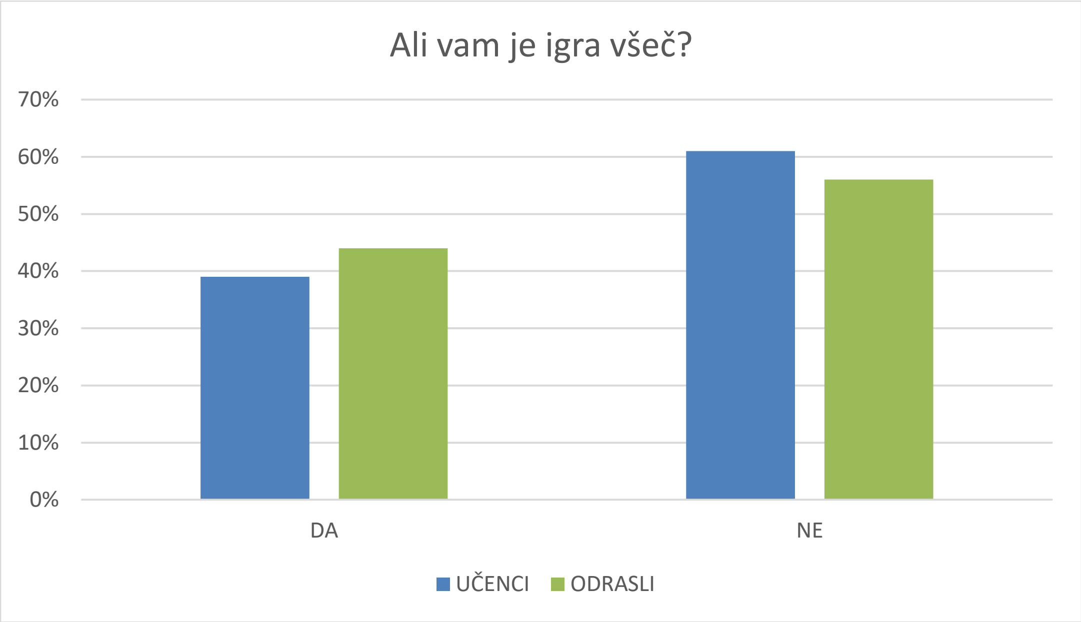
Graf 6: Katero mrežo so rešili učenci in katero odrasli glede na spol.



Mrežo 3 x 3 je rešilo največ fantov (33 %), mrežo 4 x 4 deklet (15 %), mrežo 5 x 5 pa moških (17 %). Največ žensk je izbralo odgovor drugo (67 %).

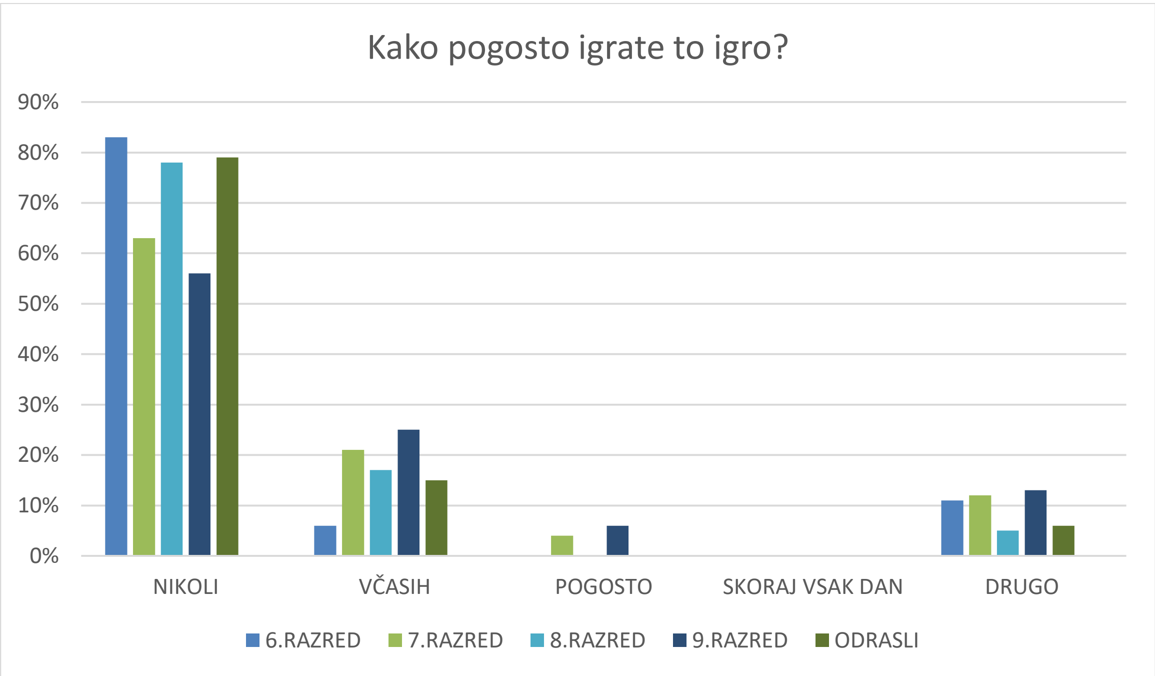
Največ odgovorov pod drugo je bilo: nisem še igral.

Graf 7: Ali je ta igra všeč učencem ali odraslim?



Igra je bolj všeč odraslim (44 %) kot učencem (39 %).

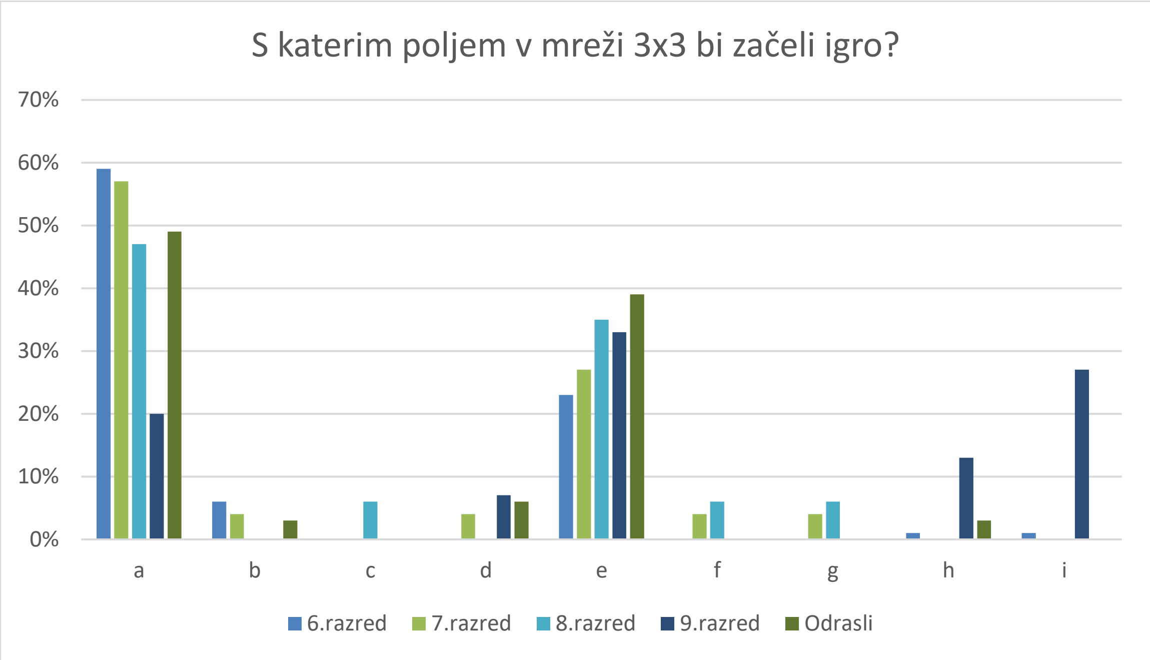
Graf 8: Kako pogosto igrajo igro učenci glede na starost in odrasli.



Večina vseh anketiranih se je odločila za odgovor nikoli. Med 6. razredi je ta izgovor izbralo 83 %, med 7. razredi 63 %, med 8. razredi 78 %, med 9. razredi 56 % in med odraslimi 79 %. Največ odgovorov pod drugo: ne igram.

Graf 9: S katerim poljem bi začeli igrati igro v mreži 3 x 3?

a	b	c
d	e	f
g	h	i



Večina anketiranih bi začela s poljem A ali E. Polje A: 6. razred (59 %), 7. razred (57 %), 8. razred (47 %), 9. razred (20 %) in odrasli (49 %). Polje E: 6. razred (23 %), 7. razred (27 %), 8. razred (35 %), 9. razred (33 %). 39 % odraslih se je odločilo za polje E.

4 RAZPRAVA

Ugotovitve podajamo glede na izračune in na analizo anket ter jih interpretiramo na podlagi hipotez.

HIPOTEZA 1: Igra ostalim ni znana pod tem imenom.

Hipotezo lahko **potrdimo**, saj je iz *Grafa 2* razvidno, da 84 % učencev in 88 % odraslih še ni igralo te igre. Lahko pa menimo, da jim je igra znana, vendar ne pod tem imenom, saj je dostikrat vpeta v ostale igre kot del pri prehodu z ene stopnje na drugo.

HIPOTEZA 2: Starejši igro bolje poznajo kot mlajši.

Hipotezo lahko **ovržemo**, saj 88 % odraslih, ki so reševali anketo, igre še ni igralo, tudi 84 % otrok ne, kar je razvidno iz *Grafa 5.*

Pri reševanju so pri majhnih mrežah 3 x 3 in 4 x 4 uspešnejši otroci, pri reševanju v mreži 5 x 5 pa so odrasli bolj uspešni kot v manjših mrežah (4 %), vendar so v tem primeru otroci 8. razreda v 20 % rešili igro, kar razberemo iz *Grafa 6.*

Če pa upoštevamo, kako je igra komu všeč, pa iz *Grafa 7* razberemo, da so ji bolj naklonjeni odrasi kot otroci, vendar le v 44 %.

Menimo, da če bi odrasli bolje poznali igro, bi jo tudi uspešneje reševali in se osredotočili tudi na večje mreže, če bi imeli izkušnje z reševanjem manjših dimenzij in bi igro igrali tudi pogosteje, in ne le včasih (25 %), kot je razvidno iz *Grafa 8.* Odgovor *pogosto* pa so v 0 % izbrali odrasli in v 6 % 9. razredi.

HIPOTEZA 3: Igralci igro v mreži 3 x 3 vedno začnejo s poljem a ali pa s srednjim poljem e.

Hipotezo lahko **potrdimo**, potrdimo pa lahko tudi to, da je bila bolj verjetna izbira *polje a* kot *polje e*, saj je v anketi le nekaj učencev in odraslih izbralo polja b, c, d, f, g, in h, *polje a* pa 49 % odraslih in 59 % učencev 9. razreda, 57 % učencev 7. razreda, 47 % učencev 8. razreda in 20 % učencev 9. razreda, kot je razvidno iz *grafa 9.*

Za *polje e* se je odločilo 39 % odraslih, 23 % učencev 6. razreda, 27 % učencev 7. razreda, 35 % učencev 8. razreda in 33 % učencev 9. razreda.

Le izbira učencev 9. razreda je izstopala, saj so kar s 27 % izbrali *polje i* in s 13 % *polje h,* vendar so tudi ti učenci najpogosteje izbrali *polje e,* in sicer s 33 %.

HIPOTEZA 4: V primeru dvakratnega stiska na eno polje ne dobiš začetne situacije.

Hipotezo lahko **ovržemo**, saj smo s kongruencami po modulu 2 dokazali, da če stisnemo na polje lihokrat, je ista situacija, kot če bi stisnili le 1-krat, če pa stisnemo na polje sodokrat, pa nastane ista situacija, kot če na to polje sploh ne bi pritisnili.

HIPOTEZA 5: Obstaja točno določeno število rešitev, da ugasneš vse luči.

Hipotezo lahko **potrdimo**, saj smo s pomočjo zapisa odvisnih in neodvisnih polj in pomočjo osnovnega izreka kombinatorike – s pravilom produkta zapisali največje možno število rešitev, ker sta za vsako polje možni le dve situaciji 0 ali 1. Tako smo za polje *3 x 3* zapisali največje možno število rešitev je 8, pri mreži *4 x 4* je možnih rešitev 16, pri mreži *5 x 5* pa 32, a smo pokazali s poskušanjem, da jih je v določenih mrežah dosti manj, samo pri mreži *4 x 4* jih je bilo toliko kot vseh možnih rešitev.

HIPOTEZA 6: Večja kot je mreža, več je možnih rešitev.

Hipotezo lahko **ovržemo**, saj smo z raziskovanjem in poskušanjem pokazali nasprotno. Res je, da je možnih rešitev pri vedno večjih mrežah večje, vendar smo s preizkušanjem pokazali, da je pri mreži *3 x 3* le ena rešitev, pri mreži *4 x 4* je rešitev 16, v mreži *5 x 5* pa le štiri.

HIPOTEZA 7: Najprej se igra v polju 3 x 3 , ker je znano, da je v tej mreži lažje priti do rešitve.

Hipotezo lahko **potrdimo**, saj smo z anketnim vprašalnikom dobili rezultate, da je igro v mreži *3 x 3* že kdaj rešilo 47 % učencev 9. razreda, 27 % učencev 8. razreda, 43 % učencev 7. razreda in 6 % učencev 6. razreda ter 17 % odraslih, mrežo 4 x 4 pa je rešilo dosti manj učencev in le 8 % odraslih, medtem ko je mrežo 5 x 5 rešilo le 4 % odraslih in le 20 % učencev 8. razreda.

Presenetila nas je ugotovitev, da so najmanjšo mrežo 3 x 3 rešilo največ fantov (33 %), mrežo 4 x 4 je rešilo največ deklet (15 %), mrežo 5 x 5 pa je rešilo največ moških (17 %).

5 ZAKLJUČEK

S poglobitvijo v reševanje igre z matematičnim ozadjem smo razširili svoja znanja na matematičnem področju. Spoznali smo nove veje matematike: kombinatoriko in algebro, s katerima lahko računamo zelo zapletene zapise. Za nas sta bila izračuna možnosti izbire s kombinatoriko in kongruence iz algebre nekaj povsem novega in zanimivega. Z raziskovanjem smo pridobili mnogo matematičnih izkušenj ter spretnosti, ki nam bodo v nadalje zagotovo prišle prav.

Naučili smo se, kako z matematiko priti do rešitev v igri. Ugotovili smo, da ne moremo določiti največjega števila stiskov na polja za rešitev, lahko pa določimo najmanjše stiskov na polja.

Za to smo v nalogi poleg izračunov v veliki meri uporabili tudi poskušanje, saj bi bili matematični zapisi za natančen izračun zmagovalnih potez za nas prezahtevni.

Ker smo se osredotočili na mreže manjše velikosti, bi lahko nadalje raziskovalno nalogo razširili na pravokotna polja ali pa na kvadratna polja z večjo dimenzijo.

6 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Matematika je nepogrešljiva na več področjih. Najdemo jo tudi v reševanju iger. Da rešimo to igro, moramo razmišljati logično, s čimer urimo možgane. Spoznali smo, da računalniške igre torej niso vedno slabe, ampak je škodljivo le prekomerno igranje iger, v pravi meri pa vzpodbujajo logično razmišljanje, ki ga lahko uporabimo v življenjskih situacijah.

Menimo, da bi to igro lahko igrali pred tekmovanji iz logike, da bi s tem urili logično razmišljanje, saj ko to igro začneš igrati, ne veš, kako bi začel, zato poskušaš igrati, dokler ne prideš do rešitve.

7 VIRI IN LITERATURA

7.1 Pisni viri

Šparovec. J. in drugi. (2009). TEMPUS = Čas: matematika za 4. letnik gimnazij. Založba Modrijan.

Zbirka Tematski leksikoni. MATEMATIKA. (2008). Učila International. (Prevod: Lešnjak. G.)

7.2 Spletni viri

https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game) (pridobljeno 2. 12. 2020)

https://daattali.com/shiny/lightsout/ (pridobljeno 5. 12. 2020)

https://www.logicgamesonline.com/lightsout/ (pridobljeno 5. 12. 2020)

https://mathworld.wolfram.com/LightsOutPuzzle.html (pridobljeno 10 . 12. 2020)

https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game) (pridobljeno 15. 12. 2020)

https://sl.wikipedia.org/wiki/Kongruenca (pridobljeno 17. 12. 2020)

http://www.presek.si/22/1232-Vencelj.pdf - primer za negativne primere ostankov (pridobljeno 18. 12. 2020)

doc. Dr. Janko Marovt: Zabavna matematika z igrami in ugankami:

Učiteljica je razložila kongruence pri dodatnem pouku (pridobljeno 19. 12. 2020)

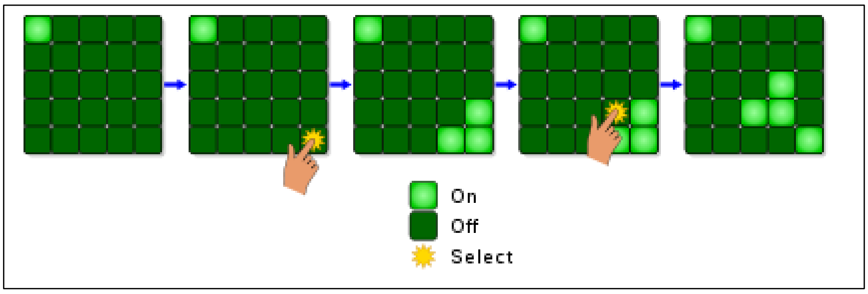
https://zpm-mb.si/wp-content/uploads/2015/06/S%C5%A0_Matematika_Kongruenca.pdf, str. 20, 21 (pridobljeno 20. 12. 2020)

8 PRILOGE

8.1 Anketni vprašalnik za otroke

OPIS IGRE:

Igra se igra tako, da moraš ugasniti vse luči v polju. Če klikneš na eno polje se ti vsa polja s sosednjo stranico spremenijo (ugasnejo ali prižgejo). Cilj igre je, da v čim manjšem številu potez ugasneš vse luči.



Slika 3: Prikaz igre ugašanja luči s pritiski na stikala… (Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game)#/media/File:LightsOutIllustration.svg)

1. Spol:

   Ž
   M

2. Razred:

   6.
   7.
   8.
   9.

3. Ali si že kdaj igral igro *Ugasnimo luči ali kakšno podobno igro*?

   DA

   NE

4. Če si že igral ali si prišel do rešitve?

   DA

   NE

5. Katero mrežo si rešil/a?

   3X3

4X4

5X5

Drugo:

6. Kako pogosto igraš to igro?

Nikoli

Včasih

Pogosto

Skoraj vsak dan

Drugo:

7. Ali ti je igra všeč?

DA

NE

8. S katerim poljem bi v mreži 3x3 začel/a igrati to igro?

A, B, C, D, E, F, G, H, I.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

9. Zdaj ko veš, kako se igra ta igra, bi jo poskusil igrati?

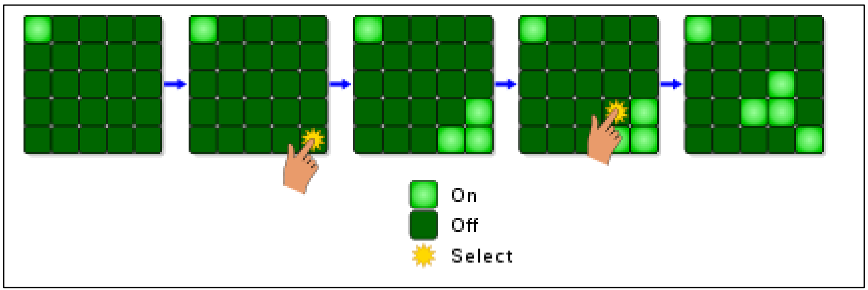
DA

NE

8.2 Anketni vprašalnik za starše

OPIS IGRE:

Igra se igra tako, da moraš ugasniti vse luči v polju. Če klikneš na eno polje se ti vsa polja s sosednjo stranico spremenijo (ugasnejo ali prižgejo). Cilj igre je, da v čim manjšem številu potez ugasneš vse luči.



Slika 4: Prikaz igre ugašanja luči s pritiski na stikala (Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game)#/media/File:LightsOutIllustration.svg)

1. Spol:

   Ž

   M

2. Ali ste že kdaj igrali igro *Ugasnimo luči ali kakšno podobno igro*?

   DA

   NE

3. Če te že igrali ali te prišli do rešitve?

   DA

   NE

4. Katero mrežo ste rešili?

   3X3

   4X4

   5X5

   Drugo:

5. Kako pogosto igrate to igro?

   Nikoli

Včasih

Pogosto

Skoraj vsak dan

Drugo:

6. Ali vam je igra všeč?

DA

NE

7. S katerim poljem bi v mreži 3x3 začeli igrati to igro?

A, B, C, D, E, F, G, H, I.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

8. Zdaj ko veste, kako se igra ta igra, bi jo poskusili igrati?

DA

NE