"55. srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2021"

Osnovna šola Janka Padežnika Maribor,

Iztokova 6, 2000 Maribor

RAČUNAMO S KOSTMI

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

RAZISKOVALNA NALOGA

Mentorici:

Mateja Slana Mesarič

Suzana Tomšič Mavrič

Avtorja:

Staš Tin Lorbar

Zala Skamlec

Maribor, 2021

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

POVZETEK

Ljudje so šteli že, ko še niso poznali številk. Seštevali in odštevali so s pomočjo prstov, kamnov, vozlov na vrveh … Z razvojem trgovine se je pojavila tudi potreba po raznih pripomočkih, ki bi omogočili lažje in hitrejše računanje. V šolski knjižnici smo zasledili knjigo o trikih s števili, kjer nas je pritegnilo računanje s kostmi. Ta trik z množenjem je star vsaj 400 let. Kosti (v resnici gre za palčke) za množenje je iznašel škotski matematik John Napier in jih imajo za prvi primer kalkulatorja. Trgovci so jih pogosto nosili s seboj v škatlicah.

V raziskovalni nalogi smo se s pomočjo literature naučili množenja in deljenja z Napierovimi kostmi. To smo primerjali z množenjem in deljenjem, kot ga poznamo mi. Ugotavljamo, da je učencem kljub današnjim kalkulatorjem množenje s kostmi zelo zanimivo.

Ključne besede: množenje, deljenje, matematika, kalkulator, John Napier

ABSTRACT

People were counting even before they knew the numbers. They added and subtracted with the help of fingers, stones, knots on the ropes… With the development of trade, there was also a need for various tools that would allow easier and faster calculation. In the school library, we came across a book on tricks with numbers, where we were attracted to counting with bones. This multiplication trick is at least 400 years old. The bones (which are actually sticks) for multiplication were invented by the Scottish mathematician John Napier and are considered to be the first example of a calculator. Merchants often carried them with them in boxes.

In the research paper, we learned multiplication and division with Napier bones with the help of literature. We compared this to multiplication and division as we know it. We find that, despite today's calculators, bone multiplication is very interesting to students.

Keywords: multiplication, division, mathematics, calculator, John Napier

1 UVOD

Ljudje nismo poznali številk, vendar smo kljub temu že šteli, seštevali in odštevali – s pomočjo prstov, kamnov, vejic, vrisovanjem zarez na veje, vzorci … V jami v Južni Afriki so odkrili skale z izpraskanimi geometričnimi vzorci, katerih izvor sega 70000 let v preteklost.

Kasneje se je pokazalo, da je takšno zapisovanje zelo zamudno, zato so razvili razne znake za zapisovanje števil (Babilonci, Egipčani, Kitajci …). Te starodavne civilizacije so imele svoje sisteme štetja, vendar so tudi njihovi zapisi števil imeli pomanjkljivosti (niso poznali simbola za število nič, enomestnih števil ni bilo mogoče neodvisno predstavljati …). Indijci so v 5. stoletju začeli uporabljati ničlo ter z mestnim zapisom števil in desetiškim sistemom odpravili te pomanjkljivosti.

Z razvojem obrti (lončarstvo, tesarstvo, tkalstvo …) in trgovine se je pojavila potreba po nekakšnih strojih oziroma pomagalih, s katerimi bi človek lažje in hitreje računal. Med prve takšne pripomočke štejemo abakus. Ta pripomoček za računanje s kroglicami so uporabili že okrog 2500 let pred našim štetjem. Kasneje, v 17.stoletju, se pojavi analogno logaritemsko računalo, ki je omogočalo hitrejše množenje in deljenje števil (na podlagi pravil logaritmiranja, ki jih je odkril John Napier). V 19. stoletju se nato pojavi prvi kalkulator, danes pa si življenja brez računalnikov več ne znamo predstavljati.

1.1 Raziskovalni problem

Hote ali nehote se je matematika pojavila z nastankom človeštva in se razvijala skupaj z evolucijo človeka. Namen je bil vedno enak, poenostavitev in pomoč pri računanju. Tak namen je imel tudi John Napier, ko je »izumil« računanje s kostmi. Izdelal je palice za poenostavitev množenja in deljenja, ki jim pravijo tudi prvi primer kalkulatorja.
Zanimalo nas je, kakšno je matematično ozadje množenja in deljenja s kostmi? Ali bi bili postopki množenja in deljenja s kostmi danes hitrejši kot pisno računanje? Ali si bi lahko, samo s pomočjo opisane in predstavljene tehnike množenja in deljenja, današnji učenci pomagali pri vsakdanjem računanju in bili ob tem hitrejši in spretnejši od pisnega računanja?
Iskanje odgovorov na ta vprašanja nas je vodilo do zaključka raziskovalne naloge.

1.2 Hipoteze

1. Množenje in deljenje z Napierjevimi kostmi je zapletenejše od pisnega množenja in deljenja kot ga poznamo danes.

1.3 Teoretične osnove

1.3.1 Desetiški sistem

Številski sistem ali številski sestav je sistem, v katerem so urejena števila. Število je matematičen pojem, ki označuje količino nečesa. V vsakodnevnem življenju se srečujemo s števili in številkami. Številke so le zapisi za števila.

Desetiški sistem je sistem, ki ga uporabljamo v našem vsakodnevnem življenju. Je sistem, kjer so osnove potence števila 10. Vsak zapis je sestavljen iz števk, ki nam povedo, koliko posameznih potenc števila 10 vsebuje opazovano število. Števke v desetiškem zapisu števila so iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Imena posameznih števk od desne proti levi so: enice, desetice, stotice, tisočice … Naravno število je n-mestno, če je v njegovem zapisu n števk. (https://eucbeniki.sio.si/vega1/19/index2.html)

Zapis števila v desetiškem sistemu:

$$\boldsymbol{n = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots a_1 \cdot 10 + a_0}$$

Primer :

Število 98765 zapisano:

– z večkratniki potenc števila 10: 98765 je 9·10000 + 8·1000 + 7·100 + 6·10 + 5·1

– z desetiškimi enotami: 98765 je 9DT 8T 7S 6D 5E

Uporabimo lahko tabelo:

	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
98765	9	8	7	6	5

1.3.2 Osnovne računske operacije

Poznamo štiri osnovne računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje. Med njimi veljajo računski zakoni:

- komutativni (zakon o zamenjavi členov)

  primer: $5 + 4 = 9$ oziroma $4 + 5 = 9$

  $5 \cdot 4 = 20$ oziroma $4 \cdot 5 = 20$
- asociativni (zakon o poljubnem združevanju členov)

  primer: $3 + 12 + 7 = (3 + 7) + 12$

  $2 \cdot 14 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 14$
- distributivnost (zakon o razčlenjevanju)

  primer: $(3 + 8) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 5$

Deljenje in odštevanje pa se precej razlikujeta od množenja in seštevanja, saj je vrstni red računanja zelo pomemben. Če zamenjamo mesta členov, dobimo popolnoma drugačen rezultat. Pomembno pravilo je tudi, da računamo od leve proti desni.

- primer odštevanja: $42 - 7 = 35$ oziroma $7 - 42 = -35$
- primer deljenja: $42 : 7 = 6$ oziroma $7 : 42 = \frac{1}{6}$

1.3.3 Množenje

Množenje je računska operacija, katerih členi se imenujejo:

5	$\cdot$	7	=	35
MNOŽENEC		MNOŽITELJ		ZMNOŽEK

Poznamo več metod množenja. Pri nas je najbolj razširjena metoda, ki temelji na razčlenitvi množitelja (na enice, desetice, stotice …) in distributivnostnem zakonu.

Primer: $123456 \cdot 672 = 123456 \cdot (600 + 70 + 2) =$

$$= 12346 \cdot 600 + 123456 \cdot 70 + 123456 \cdot 2 = 82962432$$

To je običajno zapisano v obliki pisnega množenja:

$$\begin{array}{r}
\underline{123456 \cdot 672} \\
740736 \\
864192 \\
+ \quad 246912 \\
\hline
82962432
\end{array}$$

Najprej množenec pomnožimo z največjo desetiško enoto množitelja in lahko pripišemo ničlo. Množenec nato pomnožimo z naslednjo desetiško enoto množitelja. Če nismo prej pripisali ničle, zapis pomaknemo za eno mesto na desno. Množenec pomnožimo še s tretjo desetiško enoto množitelja in zapis spet pomaknemo za eno mesto na desno.

Na koncu še seštejemo delne zmnožke.

1.3.4 Deljenje

Deljenje je računska operacija, katerih členi se imenujejo:

6	:	3	=	2
DELJENEC		DELITELJ		KOLIČNIK

Pri pisnem deljenju vedno delimo od leve proti desni. Tako kot pri množenju lahko uporabimo distributivnostni zakon. Pri tem razčlenimo deljenca na desetiške enote.

Primer: $54 : 2 = (50 + 4) : 2 = 50 : 2 + 4 : 2 = 25 + 2 = 27$

To je običajno zapisano v obliki pisnega deljenja.

$$\begin{array}{l}
54 : 2 = 27 \\
14 \\
\;\;0
\end{array}$$

Pravilo je, da začnemo deliti z največjo desetiško enoto v deljencu, v našem primeru je to število 5, ki predstavlja desetice (5D : 2 = 2D ostane 1D). Dobili smo desetice količnika.

Ostanek 1D zapišemo pod desetice deljenca in zraven podpišemo enice deljenca, torej 4. Tako dobimo število 14, ki predstavlja enice (14E : 2 = 7E). Pri tem smo izračunali enice količnika.

Dobljeni količnik je 27.

1.3.5 John Napier

1.3.5.1 Življenje in izobraževanje

John Napier se je rodil leta 1550 v Edinburghu na Škotskem. Njegov oče je bil sir Archibald z gradu Merchiston, njegova mama pa Janet Bothwell, hči političarke. Umrl je leta 1617 v Edinburgu. O njegovi mladosti ni veliko zapisanega, vendar predvidevajo, da je potoval v tujino tako kot večina sinov škotske deželne gospode. Ena izmed redkih informacij je pismo Johnovega strica Johnovemu očetu:

> ,,Prosim vas, gospod, da svojega sina Johna pošljete v šolo; v Francijo ali Flandrijo; kajti doma se ne more dobro učiti niti zaslužiti v tem najbolj nevarnem svetu - da bi bil lahko v njem rešen; - da bo lahko iskal čast in dobiček, saj ne dvomim, da bo ... ˝
>
> (vir: https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/Napier/)

Napierjevo ime se pojavlja na maturi kolidža St. Salvator's College za leto 1563. Tega leta je potem nadaljeval izobraževanje na univerzi St. Andrews. Glede na dostopne podatke, študija ni končal, saj je nadaljeval izobraževanje v Evropi, najverjetneje na univerzi v Parizu.

Leta 1571 se je za zmeraj vrnil domov, kjer se je leto kasneje poročil z Elizabeth Stirling, s katero sta imela dva otroka. Po njeni smrti se je poročil še drugič. Posvetil se je upravljanju svojih posesti in se začel ukvarjati s kmetijstvom. Pri tem je imel znanstven pristop, saj je začel z uporabo soli kot gnojila. Patentiral je tudi hidravlični vijak, s pomočjo katerega je bilo mogoče vodo odstraniti iz poplavljenih premogovnikov.

Bil je teolog in matematik. Mnogi pa so povedali, da je bil pogosto videti tudi kot čarovnik, saj naj bi se ukvarjal z alkimijo.

Slika 1: John Napier

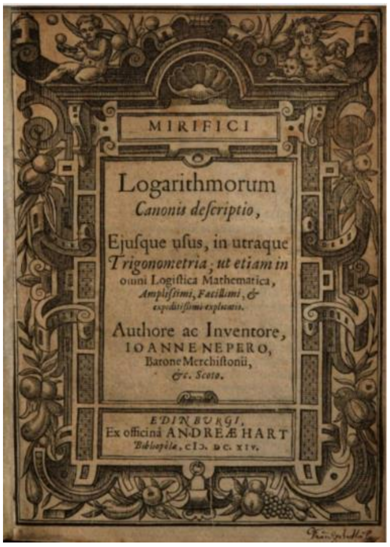
(Vir: https://es.wikipedia.org/wiki/John_Napier)

1.3.5.2 Napierjeva dela

V življenju ga je zanimala teologija, matematika, astronomija, astrologija. Kot goreč protestant je leta 1594 objavil delo, ki zavzema vidno mesto v škotski cerkveni zgodovini. To je *»Odkritje celotnega razodetja svetega Janeza«,* ki temelji na pomislekih, da bi Filip Španije lahko napadel Škotsko.

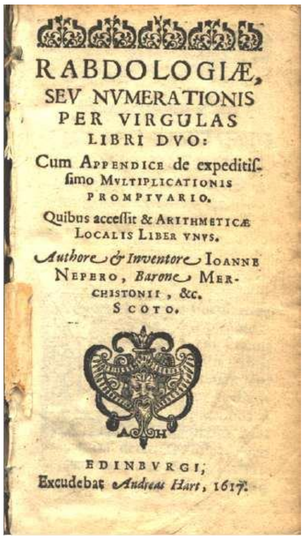
Zanimanje za astronomijo ga je pripeljalo do matematičnih problemov. Razmišljal je, kako poenostaviti računanje. Tako je leta 1614 objavil »*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*« (Opis čudovite tabele logaritmov), kjer je napovedal svoj izum logaritmov. Knjiga je vsebovala razlage in tabele s števili, ki so povezane z naravnimi logaritmi. Izraz »logaritem« je skoval iz dveh starogrških izrazov "logos", kar pomeni razmerje, in "arithmos", kar pomeni število. Izkazalo se je, da je tehnika zelo natančna, njegovo delo pa je bilo prevedeno v različne jezike. Njegovi logaritmi so pomagali pri trigonometričnih izračunih v astronomiji in navigaciji.

Po njegovi smrti, leta 1620, je izšla tudi knjiga *"Mirifici logarithmorum canonis constructio"* (Gradnja logaritmov), kjer je opisal, kako izračunavati logaritme. Napier je izboljšal tudi decimalni zapis, ki ga je uvedel Simon Stevin, in decimalno vejico vpeljal v splošno uporabo. V želji, kako še poenostaviti, je izdelal mehansko orodje za množenje, oštevilčene palice. V svojem zadnjem delu *"Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas Libri Duo"* (Študija palic), objavljenem leta 1617, je predstavil delovanje teh palic.



Slika 2: Gradnja logaritmov

(Vir: https://www.historyofinformation.com/detail.php?id=367)



Slika 3: Študija palic

(Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Rabdology)

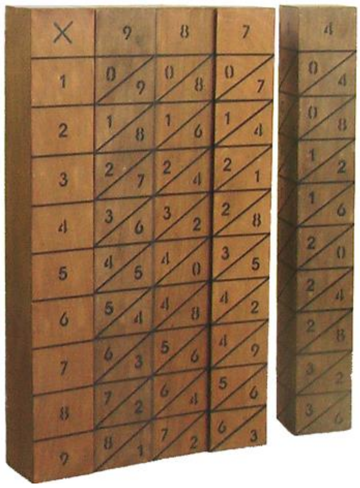
1.3.6 Napierjeve kosti

Napierjeve kosti imajo za prvi primer kalkulatorja. Temeljijo na starodavni metodi množenja, imenovani mrežasto množenje. To so bile podolgovate palice, ki so jih izdelovali iz pravih kosti (od tod tudi poimenovanje), lesa, slonove kosti ali roževine. Trgovci so jih pogosto nosili s seboj v usnjenih ali lesenih škatlah.

Slika 4: Napierjeve kosti

(Vir: https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/stories/science-and-technology/napiers-bones/)

Te palice so bile razdeljene na deset kvadratov in so predstavljale poštevanko števil od 1 do 9. V zgornjem kvadratu je bilo vpisano, za katero število gre. V ostalih devet kvadratov na posamezni palici so bila vpisana števila, ki jih dobimo pri množenju tega števila s števili od 1 do 9. Kvadrati so bili razdeljeni še z diagonalo, tako so števila ločili na desetice in enice. Običajno so palice postavili na ploščo, kjer so bile na levem robu številke od 1 do 9. Postavili so jih v vrstnem redu števk števila, s katerim so računali.



Slika 5: Palice

(Vir: https://www.univ-brest.fr/instruments-scientifiques/menu/Reconstructions+et+Prototypes/B-tons-de-Napier-de-demonstration)

2 OSREDNJI DEL NALOGE

2.1 Metodologija

Uporabili smo naslednje metode dela:

- metodo proučevanja pisnih virov,
- metodo praktičnega dela.

2.1.1 Metoda proučevanja pisnih virov

Začetna metoda dela je bila metoda dela s pisnimi viri. Literaturo smo iskali v šolski knjižnici, Mariborski knjižnici in na spletu. Zbrano gradivo smo preučili in prebrali. Ugotovitve smo povzeli in uskladili.

2.1.2 Metoda praktičnega dela

Metodo praktičnega dela smo uporabili za prikaz in izdelavo Napierjevih kosti ter računanje z njimi. Izdelane palice smo fotografirali, fotografije smo uporabili v nalogi za prikaz množenja in deljenja. Z izdelanimi palicami smo učencem v razredu predstavili množenje in deljenje, nato pa preverili njihovo razumevanje in spretnost pri računanju.

2.2 Opis rezultatov

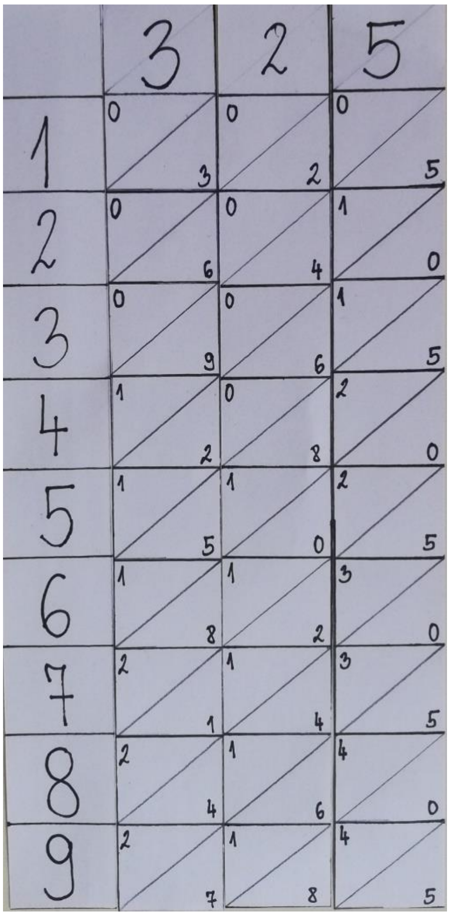
2.2.1 Množenje z Napierjevimi kostmi

Množimo lahko poljubna števila, če le izdelamo dovolj palic (posamezna števila se lahko ponovijo). V nadaljevanju bomo pokazali primere množenja z enomestnim številom (s prehodom in brez) ter dvomestnim številom.

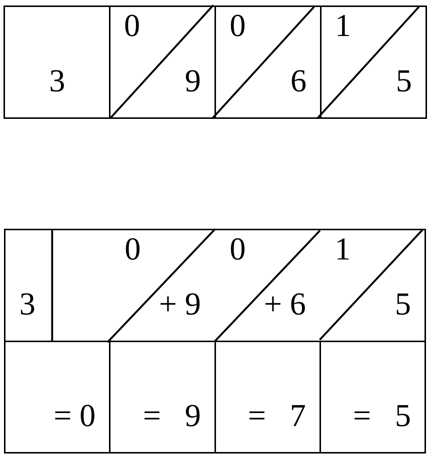
2.2.1.1 Množenje z enomestnim številom

Primer 1: $325 \cdot 3$

Na začetek (skrajno levo) postavimo palico z množitelji (kazalo) od 1 do 9. Zraven postavimo eno poleg druge palice označene s števili 3, 2 in 5 (slika 6).



Slika 6: Primer 1
(Vir: avtorja)



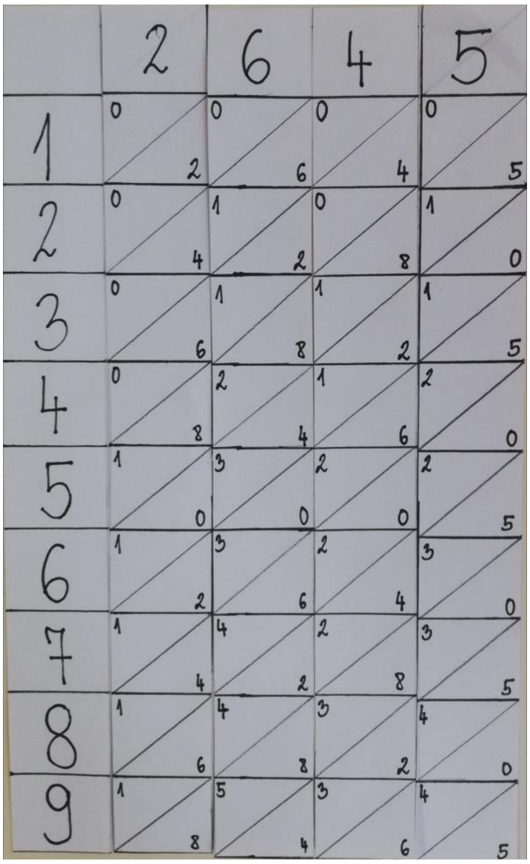
Slika 7: Preglednica primera 1
(Vir: avtorja)

Na levi strani tabele poiščemo množitelja, število 3, s katerim bomo množili. Množiti začnemo od desne proti levi, in sicer tako da preberemo števila v vodoravni vrsti in seštejemo tista, ki so poravnana v diagonalni smeri (slika 7). Rezultat preberemo od leve proti desni.

Torej je $325 \cdot 3 = 975.$

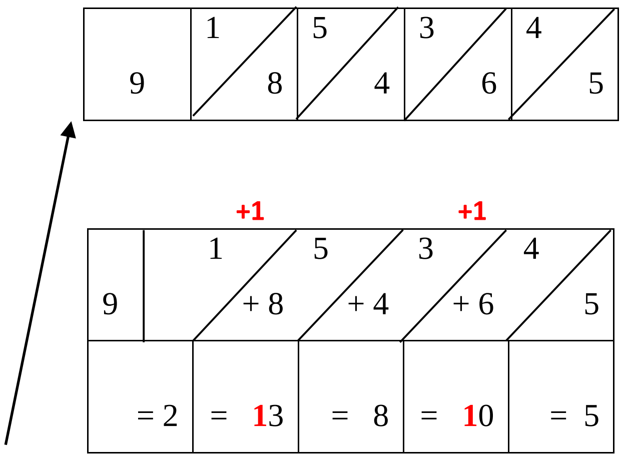
Primer 2: $2645 \cdot 9$

Ponovno na začetek (skrajno levo) postavimo palico z množitelji (kazalo) od 1 do 9. Zraven postavimo eno poleg druge palice označene s števili 2, 6, 4 in 5 (slika 8).



Slika 8: Primer 2

(Vir: avtorja)



Slika 9: Preglednica primera 2

(Vir: avtorja)

Na levi strani tabele poiščemo množitelja, število 9, s katerim bomo množili. Množiti začnemo od desne proti levi, tako da preberemo števila v vodoravni vrsti in seštejemo tista, ki so poravnana v diagonalni smeri (slika 9). Če je vsota 10 ali več, se število desetic prenese v sosednji stolpec in se prišteje k številkam, ki so že tam zapisane. Rezultat preberemo od leve proti desni.

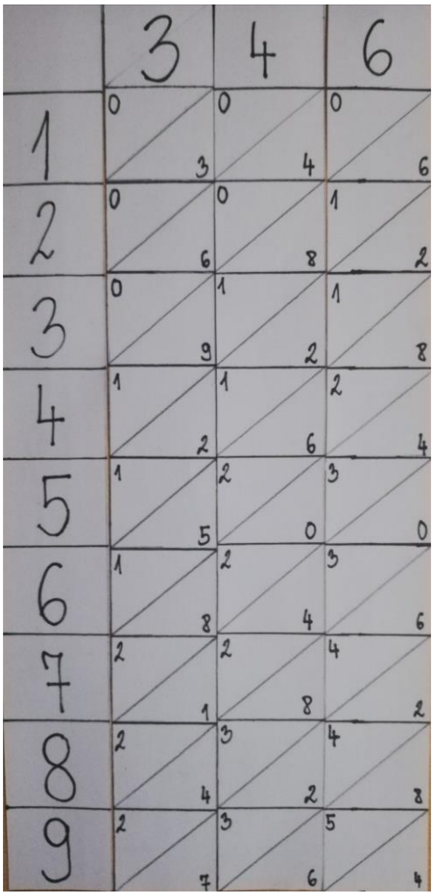
Torej je $2645 \cdot 9 = 23805$.

2.2.1.2 Množenje z dvomestnim številom

Če je množitelj dvomestno število, postopek ponovimo dvakrat. Najprej s pomočjo tabele preberemo zmnožek prvega števila desetic (in dodamo na koncu 0), nato še enic in potem oba rezultata seštejemo.

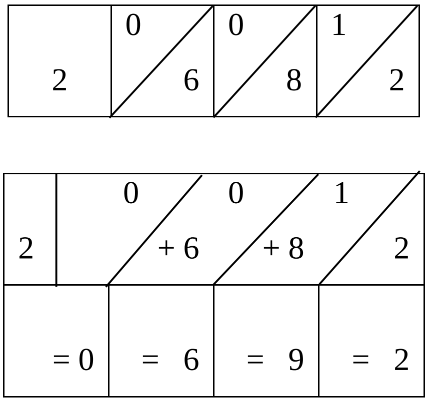
Primer 3: $346 \cdot 25$

Na začetek (skrajno levo) postavimo palico z množitelji (kazalo) od 1 do 9. Zraven postavimo eno poleg druge palice označene s števili 3, 4 in 6 (slika 10).



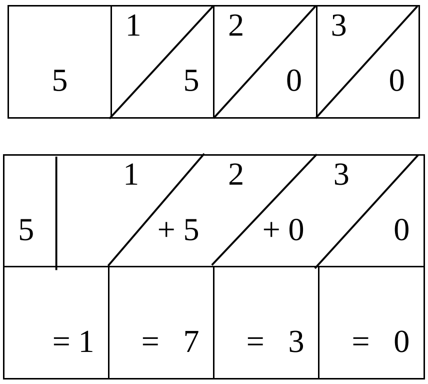
Slika 10: Primer 3

(Vir: avtorja)



Slika 11: Preglednica 1 primera 3

(Vir: avtorja)



Slika 12: Preglednica 2 primera 3

(Vir: avtorja)

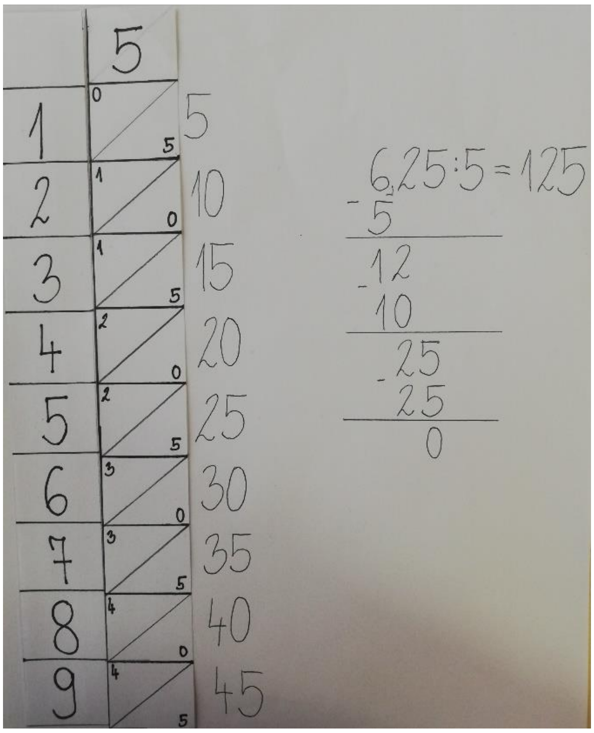
Sedaj na levi strani tabele poiščemo množitelja, število 2 in število 5. Preberemo števila v vodoravni vrsti in seštejemo tista, ki so poravnana v diagonalni smeri (slika 11) za število 2 in posebej za število 5 (slika 12). Število 2 predstavlja množenje z deseticami, zato rezultatu pripišemo 0, število 5 predstavlja množenje z enicami, zato rezultat ostane, kot je. Obe dobljeni vsoti seštejemo $6920 + 1730 = 8650$. Torej je $346 \cdot 25 = 8650$.

2.2.2 Deljenje z Napierjevimi kostmi

Pri deljenju je pomembno, da v vrsto postavimo kosti, ki predstavljajo delitelja. Nato moramo postopek deljenja sproti zapisovati. Pokazali bomo primere deljenja z enomestnim številom (z ostankom in brez) ter deljenje z dvomestnim številom.

2.2.2.1 Deljenje z enomestnim številom

Primer 4: $625 : 5$



Slika 13: Primer 4

(Vir: avtorja)

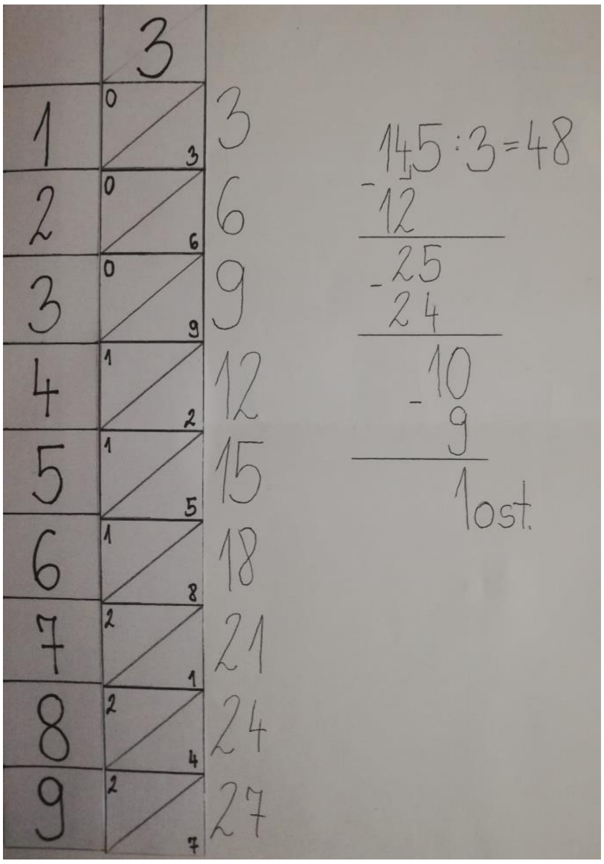
Na začetek (skrajno levo) postavimo palico z množitelji (kazalo) od 1 do 9. Zraven postavimo palico, ki predstavlja delitelja, torej palico označeno s številom 5 (slika 13).

Ob palici izpišemo zapisane večkratnike števila 5.

Delimo po postopku. Prva števka deljenca je večja od delitelja, zato delimo število 6 s številom 5. Med večkratniki števila 5 poiščemo njemu najbližje manjše ali enako število, v tem primeru je to 5. Število 5 predstavlja število 5, pomnoženo z 1, zato je 1 prva števka količnika. Število 5 zapišemo pod 6, odštejemo in dobimo 1. K temu pripišemo naslednjo števko deljenca, 2.

Dobimo število 12 ter ponovno med večkratniki števila 5 poiščemo njemu najbližje manjše ali enako število. Tokrat je to 10, ki predstavlja število 5, pomnoženo z 2, zato je 2 naslednja števka količnika. Ko odštejemo $12 - 10$ dobimo 2 in pripišemo še zadnjo števko deljenca, 5. Dobimo število 25 in ponovno poiščemo med večkratniki števila 5 njemu najbližje manjše ali enako število. Najdemo enako število, ki predstavlja število 5, pomnoženo s 5, zato je zadnja števka količnika 5. Ko odštejemo $25 - 25$ dobimo 0, kar pomeni, da ni ostanka pri deljenju. Torej je $625 : 5 = 125$.

Primer 5: $145 : 3$



Slika 14: Primer 5

(Vir: avtorja)

Na začetek (skrajno levo) postavimo palico z množitelji (kazalo) od 1 do 9. Zraven postavimo palico, ki predstavlja delitelja, torej palico označeno s številom 3 (slika 14).

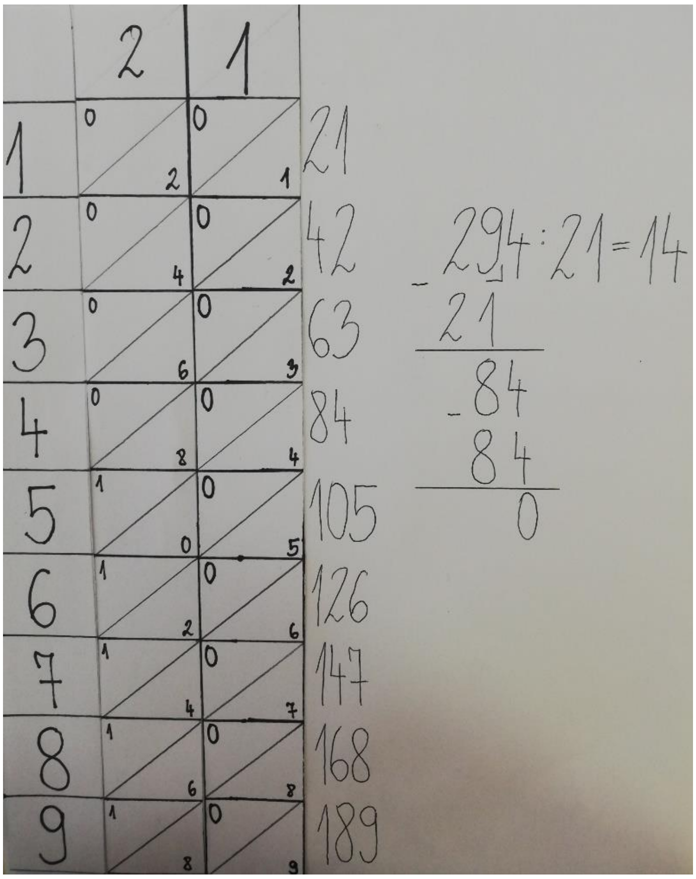
Ob palici izpišemo zapisane večkratnike števila 3.

Delimo po postopku. Prva števka deljenca je manjša od delitelja, zato vzamemo prvi dve števki, 14. Med večkratniki števila 3 poiščemo njemu najbližje manjše ali enako število, v tem primeru je to 12. Število 12 predstavlja število 3, pomnoženo s 4, zato je 4 prva števka količnika. Število 12 zapišemo pod 14, odštejemo in dobimo 2. K temu pripišemo še zadnjo števko deljenca, 5. Dobimo število 25 ter ponovno med večkratniki števila 3 poiščemo njemu najbližje manjše ali enako število. Tokrat je to 24, ki predstavlja število 3, pomnoženo z 8, zato je 8 zadnja števka količnika. Ko odštejemo $25 - 24$ dobimo 1, kar predstavlja ostanek pri deljenju.

Torej je $145 : 3 = 48 \quad ost. 1$

2.2.2.2 Deljenje z dvomestnim številom

Primer 6: $294 : 21$



Na začetek (skrajno levo) postavimo palico z množitelji (kazalo) od 1 do 9. Zraven postavimo palico, ki predstavlja desetice delitelja, torej palico označeno s številom 2. Ob njej pa še palico, ki predstavlja enice delitelja, palico, označeno s številom 1 (slika 15).
Ob obeh palicah izpišemo večkratnike števila 21.

Slika 15: Primer 6
(Vir: avtorja)

Delimo po postopku. Vzamemo prvi dve števki delitelja, 29. Med večkratniki števila 21 poiščemo njemu najbližje manjše ali enako število, v tem primeru je to kar 21. Število 21 predstavlja število 21 pomnoženo z 1, zato je 1 prva števka količnika. Število 21 zapišemo pod 29, odštejemo in dobimo 8. K temu pripišemo še zadnjo števko deljenca, 4. Dobimo število 84 ter ponovno med večkratniki števila 21 poiščemo njemu najbližje manjše ali enako število. Tokrat je to kar 84, ki predstavlja število 21, pomnoženo z 4, zato je 4 zadnja števka količnika. Ko odštejemo $84 - 84$ dobimo 0, kar pomeni, da ni ostanka pri deljenju.

Torej je $294 : 21 = 14$.

3 RAZPRAVA

Napierjeve kosti pravzaprav predstavljajo tablice množenja. V zgornjem kvadratu palice nastopajo števila od 1 do 9, v devetih spodnjih kvadratih pa je zapisanih prvih 9 večkratnikov tega števila. Vsak večkratnik je zapisan v dveh delih, z deseticami in enicami.

Skrivnost množenja je v razbitju množenca na enice, desetice, stotice … ter množenju le-teh z množiteljem. Pravzaprav množenec zapišemo z vsoto večkratnikov desetiških enot in uporabimo distributivnostni zakon ter tako množenje prevedemo v seštevanje.

V 1. primeru množenja $325 \cdot 3$ smo dobili produkt 975. Pravzaprav nam vrstica 3 izračuna produkt tako, da pomnoži enice, desetice in stotice. Vsota zapisanih števil po diagonalah nam predstavlja produkt, katerega števke beremo od leve proti desni in nam predstavljajo vsoto večkratnikov desetiških enot, v našem primeru 9S + 7D + 5E.

3	0 / + 9	0 / + 6	1 / 5
= 0	= 9	= 7	= 5
T	S	D	E

Množenje bi lahko potem zapisali tudi takole:

$$325 \cdot 3 = 3 \cdot (300 + 20 + 5) = 3 \cdot 300 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 5 = 900 + 60 + 15 = 975$$

oziroma

$$\begin{array}{llr} 3 \cdot 3\,S = 9\,S & (3 \cdot 300 = & 900) \\ 3 \cdot 2\,D = 6\,D & (3 \cdot 20 = & 60) \\ 3 \cdot 5\,E = 15\,E & (3 \cdot 5 = & 15) \\ \hline & & 975 \end{array}$$

V 2. primeru množenja $2645 \cdot 9$ smo dobili produkt 23805.

9	1 / + 8	5 / + 4	3 / + 6	4 / 5
= 2	= 13	= 8	= 10	= 5
Dt	T	S	D	E

Tudi v tem primeru bi množenje lahko zapisali kot:

$$2645 \cdot 9 = 9 \cdot (2000 + 600 + 40 + 5) = 9 \cdot 2000 + 9 \cdot 600 + 9 \cdot 40 + 9 \cdot 5 =$$
$$= 18000 + 5400 + 360 + 45 = 23805$$

V 3. primeru množenja $346 \cdot 25$ smo dobili produkt 8650.

2	0	0	1	
		+ 6	+ 8	2
	= 0	= 6	= 9	= 2
	T	S	D	E

V tem primeru bi množenje zapisali kot:

5	1	2	3	
		+ 5	+ 0	0
	= 1	= 7	= 3	= 0
	T	S	D	E

$$346 \cdot 25 = (300 + 40 + 6) \cdot (20 + 5) =$$

$$= (20 \cdot 300 + 20 \cdot 40 + 20 \cdot 6) + (5 \cdot 300 + 5 \cdot 40 + 5 \cdot 6) =$$

$$= (2 \cdot 300 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 6) \cdot 10 + (5 \cdot 300 + 5 \cdot 40 + 5 \cdot 6) =$$

$$= (600 + 80 + 12) \cdot 10 + (1500 + 200 + 30) =$$

$$= \mathbf{692} \cdot 10 + \mathbf{1730} = 8650$$

Število, ki smo ga prebrali v tablicah pri množenju z 2.

Število, ki smo ga prebrali v tablicah pri množenju s 5.

Število 2 predstavlja desetice množitelja, zato število, ki ga preberemo v tablicah, pomnožimo z 10.

Deliti začnemo pri največji desetiški enoti. Računamo od leve proti desni. Če je prva desetiška enota deljenca večja od delitelja, lahko delimo po postopku. Če pa je manjša od delitelja, ne moremo deliti. V tem primeru vzamemo še naslednjo desetiško enoto deljenca in delimo po postopku.

Pravzaprav gre za dolgo deljenje, kot ga poznamo tudi mi danes.

V 1. primeru deljenja 625 : 5 smo dobili količnik 125.

S	D	E		S	D	E
6	2	5	: 5 =	1	2	5
- 5						
1	2					
- 1	0					
	2	5				
	- 2	5				
		0				

Krajše bi deljenje zapisali:

S	D	E		S	D	E
6	2	5	: 5 =	1	2	5
1	2					
	2	5				
		0				

Tudi pri deljenju gre za uporabo distributivnostnega zakona. Tako bi postopek deljenja lahko zapisali tudi kot:

$$625 : 5 = (600 + 20 + 5) : 5 = 600 : 5 + 20 : 5 + 5 : 5 = 120 + 4 + 1 = 125$$

oziroma

6 S : 5 = **1 S** ostane 1 S, 2 D dopišemo → dobimo 12 D

12 D : 5 = **2 D** ostane 2 D, 5 E dopišemo → dobimo 25 E

25 E : 5 = **5 E**

V 2. primeru deljenja $145 : 3$ smo dobili količnik 48 in ostanek 1. Tudi v tem primeru bi lahko deljenje zapisali kot:

$145 : 3 = (100 + 40 + 5) : 3 \longrightarrow (33 \cdot 3 + 1 + 13 \cdot 3 + 1 + 5) =$

$= (33 \cdot 3 + 13 \cdot 3 + 7) =$

$= (33 \cdot 3 + 13 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1) =$

$= 3 \cdot (33 + 13 + 2) + 1 =$

$= 3 \cdot 48 + 1$

oziroma

14 D : 3 = **4 D** ostane 2 D, dopišemo 5 E $\longrightarrow$ dobimo 25 E

25 E : 3 = **8 E** **ostane 1 E**

Tudi v 3. primeru deljenja $294 : 21$, ko smo dobili količnik 14, bi lahko postopek zapisali kot:

$294 : 21 = (200 + 90 + 4) : 21 \longrightarrow (9 \cdot 21 + 11 + 4 \cdot 21 + 6 + 4) =$

$= (9 \cdot 21 + 4 \cdot 21 + 21) =$

$= 21 \cdot (9 + 4 + 1) =$

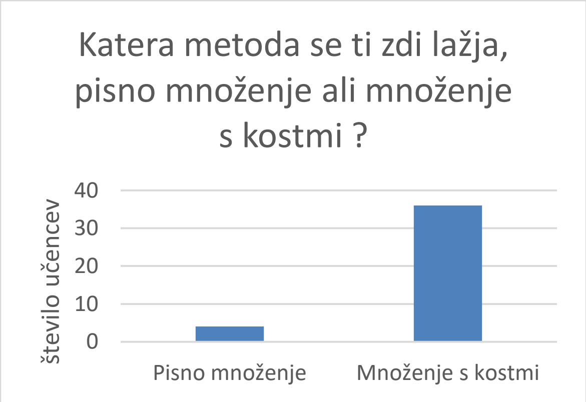
$= 21 \cdot 14$

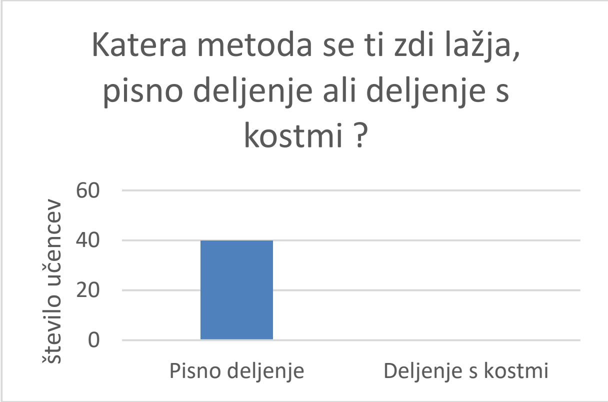
oziroma

29 D : 21 = **1 D** ostane 8 D, dopišemo 4 E $\longrightarrow$ dobimo 84 E

84 E : 21 = **4 E**

Računanje z Napierjevimi kostmi smo predstavili tudi 40 učencem v 9. razredu. Na primerih množenja in deljenja smo pokazali, kako so nam lahko palice v pomoč. Nato pa so učenci sami množili in delili, najprej s pomočjo palic, nato pa pisno. Vprašali smo jih, katera metoda se jim zdi lažja pri množenju in deljenju.





Ugotovili smo, da je učencem lažje in hitrejše množenje s kostmi, kot pa množenje, ki ga poznamo danes. Ta način jim je bolj všeč, ker morajo za izračun zmnožka števke samo sešteti, kar jim ne povzroča prevelikih težav. Ravno obratno pa je pri deljenju, kjer jim je lažji način, kot ga poznamo danes. Mnenja so, da je deljenje s kostmi dolgotrajno in težje, saj je najprej potrebno pridobiti večkratnike nekega števila, za kar potrebujemo kar nekaj časa. Šele nato pa sledi deljenje. Deljenje s palicami je pravzaprav enako kot deljenje na dolgo, ki pa ga niso navajeni, saj znajo pisno deliti na krajši način.

Na osnovi vsega zapisanega ugotavljamo, da množenje in deljenje z Napierjevimi kostmi ni nič drugačno, kot pisno množenje in deljenje, ki ga poznamo danes. Tako **hipoteze**, da je množenje in deljenje z Napierjevimi kostmi zapletenejše od pisnega množenja in deljenja, kot ga poznamo danes, **ne moremo potrditi.**

4 ZAKLJUČEK

Namen naše raziskovalne naloge je bil bolje spoznati množenje in deljenje s kostmi, ga primerjati z načini množenja in deljenja danes in ga na koncu na čim lažji način predstaviti učencem. Najprej na kratko opišemo zgodovino računanja in matematike nasploh, nato pa v teoretičnem delu desetiški sistem in osnovne računske operacije. Povzeli smo tudi življenje Johna Napierja in njegova dela.

V osrednjem delu smo pod drobnogled vzeli množenje in deljenje. Najprej smo opisali, kako se množi z enomestnimi števili. Nato smo se lotili množenja z večmestnimi števili. Tudi tukaj smo ves postopek množenja podrobno opisali in s slikovnim gradivom nazorno prikazali. Za konec smo opisali še postopek deljenja. Prav tako smo najprej opisali deljenje z enomestnimi števili in nato še z večmestnimi. Za lažjo predstavo smo dodali slikovna gradiva.

Ob raziskovanju smo se naučili in spoznali veliko novega. Preseneča nas dejstvo, da so bili ljudje že v preteklosti tako radovedni in iznajdljivi, da so iskali vedno nove bližnjice, ki bi jim pomagale pri računanju. Prav tako smo prijetno presenečeni, kako so se učenci odzvali na način množenja in deljenja, ki smo jim ga predstavili, pri čemer so imeli z deljenjem večje težave kot z množenjem. So pa predlagali, da bi imeli takšne palice kar na mizi in si pri pouku olajšali množenje.

5 DRUŽBENA ODGOVORNOST

Matematika je nepogrešljiva na različnih področjih v življenju. Marsikatere naprave ne bi bilo danes (računalniki, medicinska oprema …) brez razvoja matematike. Pomembna je za razvijanje abstraktnega mišljenja in logičnega sklepanja. Le-ta nas uči natančnosti in doslednosti. Skozi leta smo razvili svoje mentalne sposobnosti, ki smo jih ves čas nadgrajevali. Človek je naravnan tako, da vedno išče bližnjice in poenostavitve, enako je tudi pri matematiki. Ob močno razvitem abstraktnem mišljenju, logičnem sklepanju in radovednosti se matematika nenehno razvija, izboljšuje in pripomore k tehnološkemu napredku.

6 VIRI IN LITERATURA

6.1 Pisni viri

1. Colgan, L. (2011). *Čarobna matematika. Triki s števili.* Ljubljana. Tehniška založba Slovenije.

2. Bogataj, T. [et al.] (2016). *Matematika 5. Samostojni delovni zvezek za matematiko v petem razredu osnovne šole, 2. del.* Ljubljana. Mladinska knjiga Založba.

6.2 Spletni viri

1. Desetiški številski sistem. Dostopno na: https://eucbeniki.sio.si/vega1/19/index2.html (pridobljeno 3. 12. 2020)

2. John Napier. Dostopno na: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/ (pridobljeno 15. 11. 2020)

3. John Napier. Dostopno na: https://totallyhistory.com/john-napier/ (pridobljeno 15. 11. 2020)

4. John Napier. Dostopno na: https://www.britannica.com/biography/John-Napier (pridobljeno 15. 11. 2020)

5. Napierjeve kosti. Dostopno na: https://mathworld.wolfram.com/NapiersBones.html (pridobljeno 20. 11. 2020)

6. Slika John Napier. Dostopno na: https://es.wikipedia.org/wiki/John_Napier (pridobljeno 1. 12. 2020)

7. Slika Napierjevih kosti. Dostopno na: https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/stories/science-and-technology/napiers-bones/ (pridobljeno 20. 11. 2020)

8. Slika knjige Gradnja logaritmov. Dostopno na: https://www.historyofinformation.com/detail.php?id=367 (pridobljeno 10. 1. 2021)

9. Slika knjige Študija palic. Dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Rabdology (pridobljeno 10. 1. 2021)

10. Slika palic. Dostopno na: https://www.univ-brest.fr/instruments-scientifiques/menu/Reconstructions+et+Prototypes/B-tons-de-Napier-de-demonstration (pridobljeno 10. 1. 2021)

11. Pisno množenje. Dostopno na: https://rokusova-centrifuga.si/2018/10/17/pisno-mnozenje-pri-nas-in-po-svetu/ (pridobljeno 5. 12. 2020)

12. Prikaz množenja z Napierjevimi kostmi. Dostopno na: https://www.youtube.com/watch?v=mAGXmYwIhbo (pridobljeno 20. 11. 2020)

13. Prikaz deljenja z Napierjevimi kostmi. Dostopno na: https://www.youtube.com/watch?v=DYKy8ePSwmI&t=18s (pridobljeno 20. 11. 2020)

14. Računske operacije. Dostopno na: https://eucbeniki.sio.si/vega1/7/index2.html (pridobljeno 5. 12. 2020)

15. Zgodovina računalništva. Dostopno na: https://www.sutori.com/story/zgodovina-racunalnistva--Y3a77mfJmzFRkbeexmXAnrvQ (pridobljeno 3. 12. 2020)

16. Zgodovina števil. Dostopno na: http://www.nauk.si/materials/925/out/#state=1 (pridobljeno 3. 12.2020)