# PO SLEDEH BABILONSKE MATEMATIKE

## Primerjava babilonske metode, metode montessori in razdelitvene metode za računanje kvadratnega korena

Matematika

Raziskovalna naloga

Avtorici: Nika Zdešar in Rahela Demšar

Razred: 9. razred

Mentor: Igor Blažič

Marec 2021

Inštitut montessori, Zasebna osnovna šola montessori, Ljubljana

# POVZETEK

Izračunati kvadratni koren iz pozitivnega realnega števila $a$ pomeni poiskati takšno realno število $x$, da velja $x^2 = a$, kar zapišemo takole: $\sqrt{a} = x$. Geometrijsko pomeni poiskati dolžino stranice kvadrata, če je dana njegova ploščina. Opazili sva, da je bila pred kratkim odkrita nova metoda reševanja kvadratne enačbe. Omenjeno je bilo tudi, da so kvadratno enačbo znali rešiti že v babilonski civilizaciji. Reševanje kvadratne enačbe pa vsebuje tudi računanje kvadratnega korena. Pri matematiki po metodi montessori se učimo izračunati kvadratni koren brez uporabe računala. Zato naju je zanimalo, kako so kvadratni koren računali babilonski matematiki. V raziskovalni nalogi sva primerjali babilonsko metodo, metodo montessori ter razdelitveno metodo, za katero se je izkazalo, da je zelo podobna metodi montessori. Ugotovili sva, da se babilonska metoda bistveno razlikuje od obeh ostalih metod. Babilonska metoda vsebuje manj korakov, a je znotraj njih več zahtevnejših računskih operacij. Toda za računanje kvadratnega korena brez računala je prikladnejša metoda montessori oz. razdelitvena metoda.

Ključne besede: *kvadratni koren, kvadratna enačba, babilonska metoda, metoda montessori, razdelitvena metoda*

# Vsebina

POVZETEK ..... 1
1. Uvod ..... 4
2. Cilji, metode in hipoteza ..... 5
3. Metode računanja kvadratnega korena ..... 6
3.1. Izhodišče ..... 6
3.2. Babilonska metoda ..... 7
3.2.1. Zapis števil ..... 7
3.2.2. Izračun vrednosti kvadratnega korena ..... 10
3.3. Metoda montessori ..... 12
3.3.1. Osnovni način ..... 12
3.3.2. Razdelitvena metoda ..... 16
4. Rezultati ..... 20
5. Zaključki ..... 22
6. Viri in literatura ..... 23
7. Priloge ..... 24

# Kazalo slik in tabel

*Slika 1: Kvadrat števila 4* ..... 6
*Slika 2: Koren števila 16* ..... 7
Slika 3: Babilonski zapis števil (wikipedija, Babylonian_numerals) ..... 8
*Slika 4: Babilonska ploščica YBC7289 (Historia matematica,367)* ..... 9
Slika 5: Grafični prikaz določanja približka vrednosti korena števila (HM 25,371) ..... 10
*Slika 6: Pomožni kvadrat* ..... 13
*Slika 7: 1. sklop iskanja rešitve* ..... 14
*Slika 8: 2. sklop iskanja rešitve* ..... 15
*Slika 9: 3. sklop iskanja rešitve* ..... 16
*Slika 10: Pomožni kvadrat* ..... 17
*Slika 11: 1. sklop iskanja rešitve* ..... 17
*Slika 12: 2. sklop iskanja rešitve* ..... 18
*Slika 13: 3. sklop iskanja rešitve* ..... 19

## 1. Uvod

Ko sva iskali temo za najino raziskovalno nalogo iz matematike, sva na svetovnem spletu zasledili tudi prispevek Math Genius Has Devised a Wildly Simple New Way to Solve Quadratic Equations (Dockrill, 2019) in si ga ogledali. Pritegnilo naju je dejstvo, da gre za novost, omenjena pa je bila tudi starodavna babilonska matematika. Čeprav se o kvadratni enačbi še nisva učili, sva (ob pomoči najinega mentorja) raziskali, kako so to temo obravnavali Babilonci.

V starih civilizacijah je bila razvita tudi matematika. Ena takih civilizacij z visoko razvito matematiko je bila tudi babilonska civilizacija. Babilonci so poznali šestdesetiški zapis števil, znali so računati, poiskati kvadratni koren, reševati nekatere enačbe in določene geometrijske probleme (Hladnik, 2012, 8). Znali so izračunati na primer dolžino stranic pravokotnika, če poznamo ploščino pravokotnika, in razliko med dolžino in širino pravokotnika (Babilonska matematika, 2019).

Izpeljava:

Označimo dolžino pravokotnika z $y$, širino z $x$, njuno razliko z $b = y - x$ in ploščino pravokotnika s $c$. Ker je $c = xy$ in $y = b + x$, dobimo po zamenjavi enačbo

$$x^2 + bx = c \qquad (1)$$

Pozitivno rešitev te enačbe so Babilonci poiskali s pomočjo formule

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \qquad (2)$$

(Opomba: Babilonci niso poznali niti negativnih števil niti števila nič, tako da je smiselna edino pozitivna rešitev.)

Ta formula je različica formule za rešitev kvadratne enačbe, ki jo običajno uporabljamo za rešitev kvadrate enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, kjer vzamemo $a = 1$ (ali pa z $a \neq 0$) in delimo celo enačbo.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

(Pavlič, 2012)

Prof. Loh je novo metodo reševanja kvadratne enačbe opisal tudi v članku. (Loh, 2019, 2) Na kratko povzemiva.

Rešitvi enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ sta števili $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Če vzamemo $a = 1$, dobimo enačbo $x^2 + bx = c$ in njeni rešitvi zapišemo v obliki

$-\frac{b}{2} + z$ ter $-\frac{b}{2} - z$, število $c$ pa izračunamo iz zveze $z = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

V opombah avtor navaja, da so podobno zamenjavo uporabljali že Babilonci, sicer pa ni našel drugih zapisov.

Vsekakor je pri obeh načinih treba izračunati kvadratni koren pozitivnega števila. Zanimalo naju je, kako so kvadratni koren računali Babilonci. Danes se nam to zdi enostavno, saj samo pritisnemo ustrezne tipke na računalu in niti ne vemo, kako se izračuna. Pri matematiki se v naši šoli učimo računati kvadratni koren po metodi montessori brez računala. Tako sva prišli do ideje, da bi raziskali, kako so kvadratni koren računali Babilonci, in njihovo metodo primerjali z metodo montessori.

Seveda pa računanje kvadratnega korena ni povezano samo z reševanjem kvadratne enačbe. V osnovi gre za računanje dolžine stranice kvadrata, če poznamo njegovo ploščino.

## 2. Cilji, metode in hipoteza

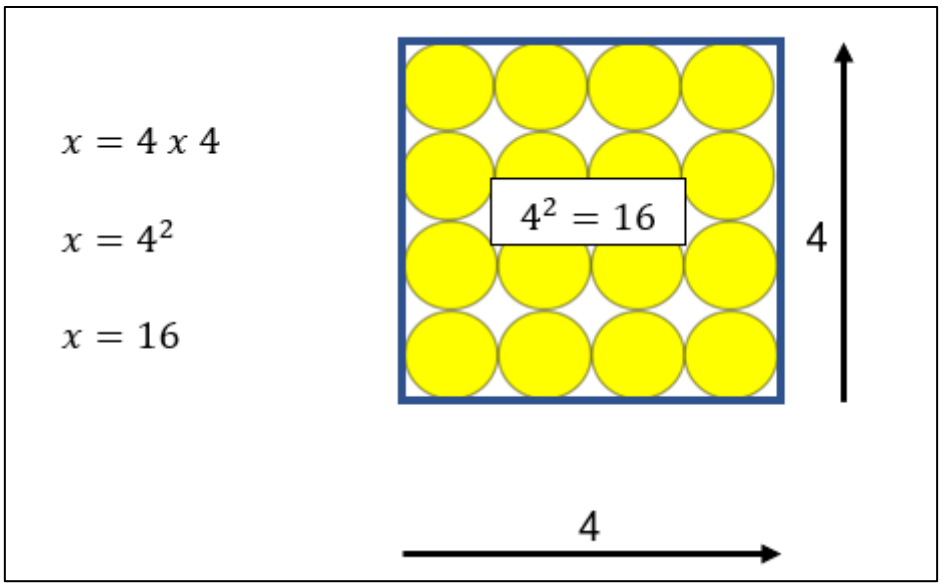
Za cilj naloge sva si izbrali raziskati, kako so kvadratni koren računali Babilonci, in njihov način primerjati z metodo montessori in razdelitveno metodo, ki ju uporabljamo v šoli. Pri tem sva uporabljali nama dostopno literaturo in vire ter »peš« računanje. Primerjavo metod sva naredili z opazovanjem konkretnih primerov računanja. Postavili sva hipotezo:

*Babilonska metoda, metoda montessori ter razdelitvena metoda se pri računanju kvadratnega korena bistveno razlikujejo v samem načinu in tudi v številu potrebnih računskih operacij.*

## 3. Metode računanja kvadratnega korena

### 3.1. Izhodišče

Ko govorimo o kvadratu števila, govorimo o produktu dveh enakih števil. Če torej vzamemo neko število na kvadrat, s tem med seboj pomnožimo dve enaki števili. S tem dejanjem pa v geometrijski predstavi tudi zgradimo popoln kvadrat, katerega stranica je enako velika številu, ki smo ga kvadrirali. Vrednost takega produkta nam v geometriji predstavlja ploščino nastalega kvadrata.

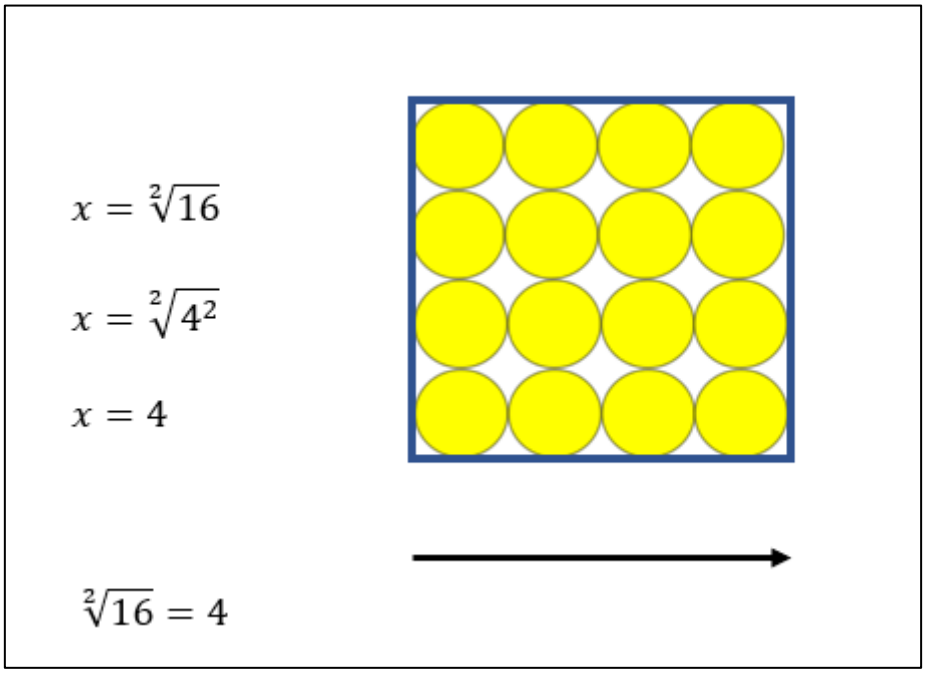



Slika 1: *Kvadrat števila 4*

Primer lahko vidimo na *sliki 1*. Število 4 smo pomnožili s 4. Tako smo zgradili kvadrat. Iz tega tudi pride ubesedenje tega procesa: štiri na kvadrat. Iz računa na levi, ki je viden na sliki, pa lahko vidimo, da smo za gradnjo kvadrata potrebovali 16 enot, ki nam hkrati simbolično predstavljajo tudi ploščino tega kvadrata.

Poiskati kvadratni koren števila predstavlja operacijo, ki je obratna operaciji kvadriranja. (V nadaljevanju bova *kvadratni koren* poimenovali kar *koren*). Imamo dano število, ki mu želimo izračunati koren. Iz njega poskušamo zgraditi popoln kvadrat. Ko

to naredimo, nam dano število predstavlja ploščino popolnega kvadrata, dolžina osnovnice tega popolnega kvadrata pa je enaka vrednosti korena števila. (Montessori, 2016, 251).




Slika 2: *Koren števila 16*

Primer vidimo na *sliki 2*. Radi bi izvedeli vrednost $\sqrt{16}$. S številom 16 smo sestavili popoln kvadrat. Rezultat $\sqrt{16}$ je v skladu z zgornjim opisom enak dolžini stranice tega kvadrata enaka 4.

To izhodišče reševanja vrednosti korena je skupno obema metodama, ki sva ju vzeli pod drobnogled v svoji raziskovalni nalogi.

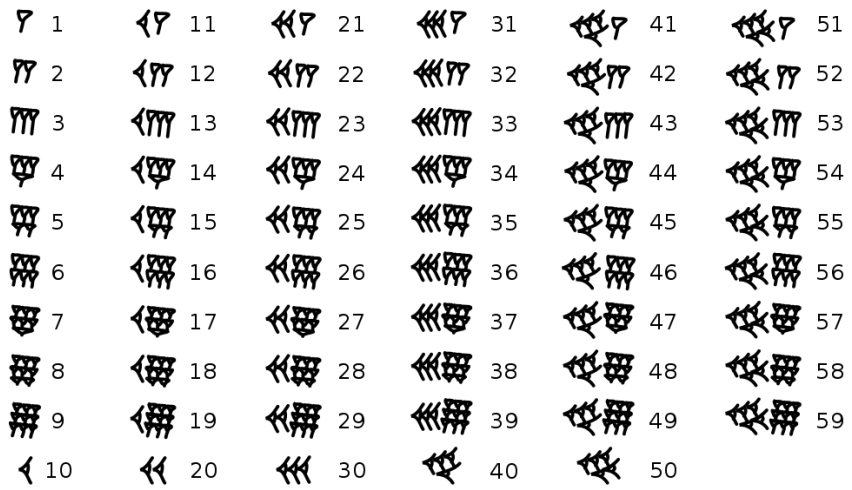
## 3.2. Babilonska metoda

### 3.2.1. Zapis števil

Z besedno zvezo *babilonska metoda* smo poimenovali metodo računanja korena, ki so jo uporabljali v babilonski civilizaciji. Babilonci so živeli med rekama Evfrat in Tigris. Ocenjujemo, da se je njihova civilizacija začela razvijati okoli 2000 pr. n. št. Pred njimi

so na tem območju živeli Sumerci, Akadci in Amoriti. Predvidevamo, da je znanje, ki so ga v starem Babilonu uporabljali in razvijali, temeljilo na njihovih spoznanjih. Uporabljali so pisavo, imenovano *klinopis,* ki so jo prevzeli po Sumercih ter jo priredili lastnim potrebam. Tako prirejeno so uporabljali tudi v matematiki.

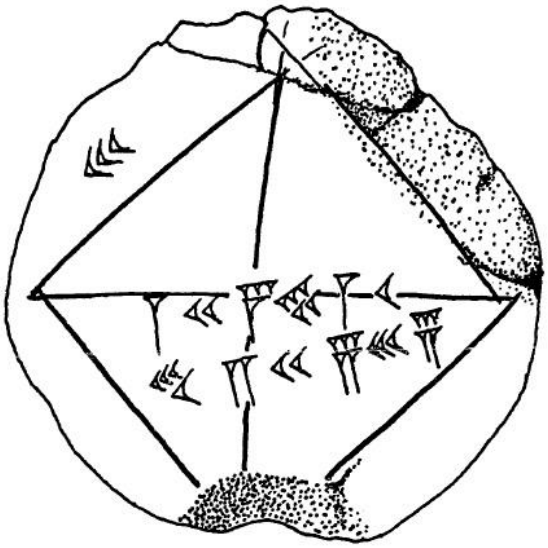
Zapis v glinenih ploščicah so oblikovali tako, da so s pomočjo posebej oblikovane paličice v mehko glino odtisnili ustrezni simbol. Na *sliki 3* je prikazana primerjava odtisa števil v babilonskem zapisu in ekvivalentnega današnjega desetiškega zapisa.




Slika 3: *Babilonski zapis števil (Wikipedija, Babylonian_numerals)*

Babilonci so v matematiki uporabljali šestdesetiški sistem, ki ga še danes uporabljamo pri merjenju časa in kotov. Števila so zapisovali z mestnimi vrednostmi z združitvijo (npr. 40 + 1). Namesto da bi tako kot Egipčani označili vsako višjo mestno vrednost z novim simbolom, so uporabili isti simbol in njegovo vrednost nakazali s položajem tega simbola. Imeli so težavo, ker niso uporabljali simbola za število nič (števila nič namreč niso poznali). Namesto njega so navadno pustili prazen prostor. Prav tako pa niso uporabljali oznake, ki bi bila enakovredna naši decimalni vejici. Ker niso pisali simbola za decimalno vejico, moramo veliko stvari sklepati iz konteksta. (Nemet, 2016)

Za primer sva si izbrali zapisa števila na babilonski ploščici YBC 7289, na kateri je tudi ohranjen zapis približka izračuna kvadratnega števila (*slika 4*).



Slika 4: *Babilonska ploščica YBC 7289 (*Fowler in Robson, 1998,*367)*

V prvi vrstici lahko preberemo zapis 1; 24; 51; 10, kar bi lahko pretvorili v desetiški zapis. Ker ne vemo, kje naj bi stala decimalna vejica, bi zapisano število lahko pretvorili brez uporabe decimalne vejice.

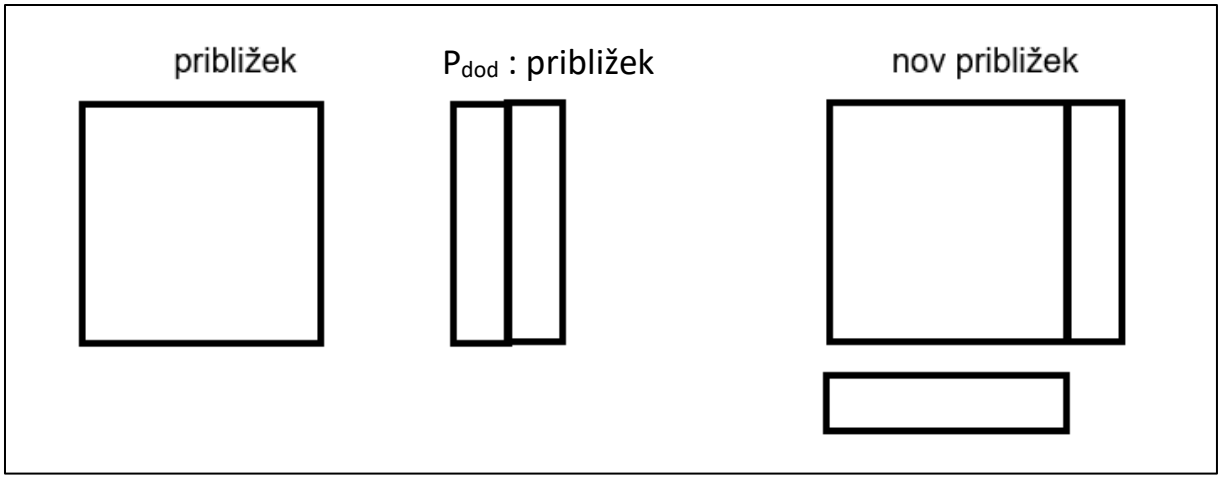
$60^3 + 24 \cdot 60^2 + 51 \cdot 60^1 + 10 \cdot 60^0 = 216000 + 86400 + 300 + 10 = \underline{302710}$

Ali ob uporabi decimalne vejice po prvem številu:

$1 \cdot 60^0 + \frac{24}{60^1} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1 + 0{,}4 + 0{,}014166 + 0{,}000046 = \underline{1{,}414212}$

### 3.2.2. Izračun vrednosti kvadratnega korena

Iz zapisov v reviji Historia Mathematica lahko preberemo, da so babilonski matematiki za reševanje kvadratnega korena uporabljali kvadrat kot izhodišče za računanje kvadratnega korena (Gersham, 1). Pri tem so si pomagali z izračunavanjem približkov (*slika 5*).




Slika 5: *Grafični prikaz določanja približka vrednosti korena števila (Fowler in Robson, 1998,* 367*)*

V ozadju iskanja približka sta izhodišči zapisani v matematični obliki. (Fowler in Robson, 1998, 371)

$$\textit{število} = \text{kvadrat približka} + p_{dod}$$

$$\textit{nov približek} = \text{približek} + \frac{\text{polovica (Pdod)}}{\text{približek}}$$

Iz teh izhodišč pridejo do naslednje enačbe (4):

$$x_2 = \frac{\frac{s}{x_1}+x_1}{2} \qquad (4)$$

Pri izračunu kvadratnega korena števila *S* so na začetku izbrali najbolj verjetni prvi približek kvadratnega korena $x_1$. V naslednjem koraku so ta izbrani približek $x_1$ uporabili za izračun novega, bolj natančnega približka vrednosti $\sqrt{S}$ ($x_2$). Pri izračunu novega približka so uporabili zgoraj zapisano enačbo (*enačba 4*).

Če so želeli bolj natančen izračun približka vrednosti $\sqrt{S}$, so nov, natančnejši približek $x_2$ vzeli kot izhodiščno vrednost za izračun novega približka po že prej predstavljeni enačbi. (Jerman, 2015,11)

$$x_3 = \frac{\frac{S}{x_2} + x_2}{2}$$

Postopek računanja približnih vrednosti ponavljamo toliko časa, dokler se vrednosti prvega približka $x_1$ in novo izračunanega približka $x_2$ do iskane decimalne vrednosti ne ponovita na predvideno število decimalnih mest.

Primer: Izračunati želimo vrednost kvadratnega korena števila 54756 do stotine natančno.

S = 54756; za naš prvi približek vzamemo $x_1 = 200$, ker vemo, da bo rezultat tromesten, in ker je $200^2 = 40000$, kar je dober prvi približek.

$$x_2 = \frac{\frac{S}{x_1} + x_1}{2} = \frac{\frac{54756}{200} + 200}{2} \approx \frac{273{,}78 + 200}{2} = \frac{473{,}78}{2} = 236{,}89$$

Naš novi približek vrednosti korena $S$ ($x_2$) je sedaj 236,89. Ker želimo izračunati približek $\sqrt{S}$ na stotino natančno, bomo še enkrat po isti enačbi izračunali nov približek vrednosti $\sqrt{S}$, pri čemer bomo uporabili pravkar izračunani približek 236,89.

$$x_3 = \frac{\frac{S}{x_2} + x_2}{2} = \frac{\frac{54756}{236{,}89} + 236{,}89}{2} \approx \frac{231{,}14 + 236{,}89}{2} = \frac{468{,}03}{2} \approx 234{,}02$$

Postopek ponovimo:

$$x_4 = \frac{\frac{S}{x_3} + x_3}{2} = \frac{\frac{54756}{234{,}02} + 234{,}02}{2} = \frac{233{,}98 + 234{,}02}{2} = \frac{468}{2} = 234$$

$$x_5 = \frac{\frac{S}{x_4} + x_4}{2} = \frac{\frac{54756}{234} + 234}{2} = \frac{234 + 234}{2} = \frac{468}{2} = 234$$

Ker imata približka izračuna $x_4$ in $x_5$ enako vrednost na stotino natančno, lahko rečemo, da velja:

$\sqrt{54756} = 234$

## 3.3. Metoda montessori

Maria Montessori se je rodila 31. 8. 1870 v Chiaravalleju pri Anconi v Italiji. Postala je prva ženska v Italiji, ki je diplomirala iz medicine. Na začetku svoje zdravniške poti se je ukvarjala z otroki s posebnimi potrebami. Da bi jim olajšala učenje, si je omislila materiale, s katerimi so ti otroci dosegali povprečja »normalnih« otrok. Sčasoma se je izkazalo, da je njena metoda primerna za vse otroke. Oblikovala je svojo lastno metodo, po kateri sedaj delujejo vrtci in šole po vsem svetu. Umrla je 6. 5. 1952 v Noordwijku aan Zee na Nizozemskem. (Pollard, 1997, 62)

### 3.3.1. Osnovni način

Računanje približka vrednosti korena nekega števila, kot smo se ga učili v razredu montessori, temelji na gradnji kvadrata, opisanega zgoraj (3.1 Izhodišče). Ne vemo, kako se ta metoda imenuje v teoriji. V raziskovalni nalogi jo imenujeva *metoda montessori* (Montessori, 251–291). Pri gradnji se držimo dveh temeljnih izhodišč:

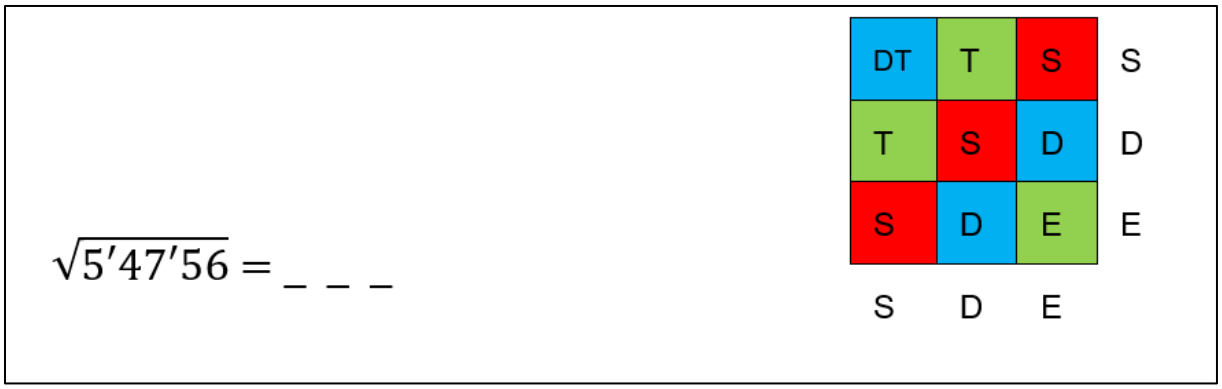
1. Kvadrat, ki ga gradimo, je vedno največji možni.
2. Da lahko rezultat potrdimo, moramo zgraditi popoln kvadrat.

Pri večji vrednosti števila upoštevamo mestne vrednosti števila. V primeru, da število, ki mu želimo izračunati koren, ne omogoča preproste izgradnje kvadrata, nam pri tem

pomagajo pomožni kvadrati (*slika 6*), ki temeljijo na binomu kvadrata, trinomu kvadrata …

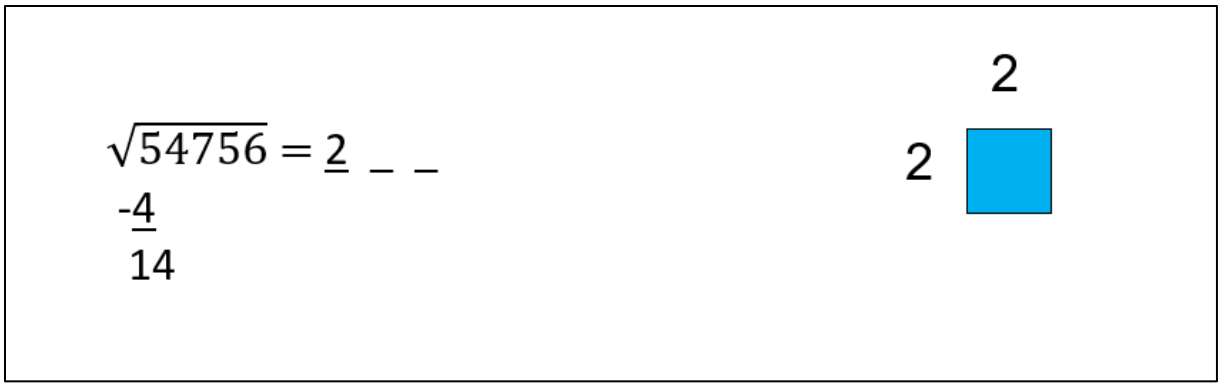
Oglejmo si potek takšnega izračuna na že prej izbranem primeru števila 54756.

Preden začnemo z gradnjo kvadrata, pogledamo število, katerega kvadratni koren računamo. Iz njegove velikosti sklepamo na število mest v rezultatu. Pri tem nam pomaga preprost razmislek, da je rezultat kvadrata enomestnega števila (npr. 9) maksimalno dvomestno število (81). Ker gre pri računanju korena za nasprotno operacijo kvadriranja, lahko sklepamo, da bosta dve mestni vrednosti števila potrebni za eno mestno vrednost v rezultatu. V našem primeru ima število 5 mestnih vrednosti, zato bo imel rezultat korena najmanj 3 mesta. Za pomoč pri gradnji našega kvadrata bomo zato vzeli trinom kvadrata (*slika 6*).




Slika 6: *Pomožni kvadrat*

Z gradnjo popolnega kvadrata iz števila 54756 začnemo tako, da sestavimo največji možni popolni kvadrat s številom najvišje kategorije, ki jo najdemo v našem pomožnem kvadratu. V našem primeru so to desettisočice. Ker imamo v našem številu (54756) 5 desettisočic, lahko z njimi zgradimo popoln kvadrat s stranico 2. Ker smo uspeli zgraditi popoln kvadrat, število 2 potrdimo kot rešitev prvega mesta (stotice) pri izračunu korena števila. Za izgradnjo prvega kvadrata smo porabili 4 desettisočice, ostala nam je ena desettisočica, ki jo bomo uporabili pri nadaljnji izgradnji našega kvadrata (*slika 7*).

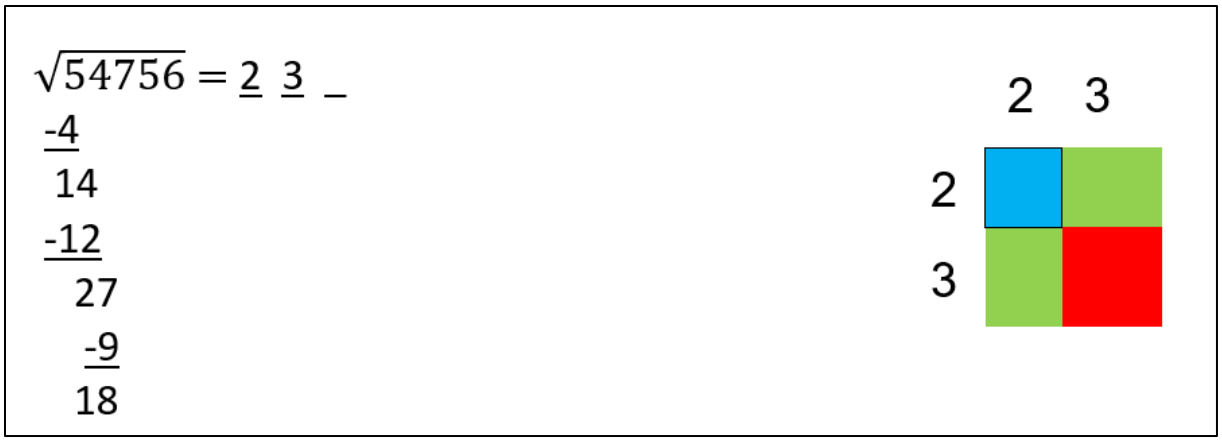



Slika 7: *1. sklop iskanja rešitve*

Z gradnjo kvadrata nadaljujemo tako, da poiščemo drugo število (desetice) v naši rešitvi. Ostanku desettisočic pripišemo število tisočic iz našega števila. Tako dobimo 14 tisočic, s pomočjo katerih začnemo v skladu s pomožnim kvadratom graditi dva pravokotnika, ki rasteta iz stranic popolnega kvadrata desettisočic. Ker pravokotnika rasteta na stranicah že izgrajenega kvadrata, imata širino 2.

Največja dolžina pravokotnika je 14 : 2 : 2 = 3,5 ≈ 3

Tako izračunamo, da je vsak izmed pravokotnikov lahko dolg največ 3 enote. Dolžina teh dveh pravokotnikov predstavlja možno drugo število naše rešitve kvadrata, zato bo 3 naše izhodišče za nadaljnje delo. Za izgradnjo pravokotnikov, ki sta zrasla iz stranic kvadrata desettisočic, potrebujemo 12 tisočic (2 pravokotnika x 2 x 3). Ostaneta nam dve tisočici. Da bi izdelali popoln kvadrat, moramo zapolniti vrzel (kvadrat), ki je nastala med obema nastalima pravokotnikoma. Ta kvadrat moramo v skladu s pomožnim kvadratom zgraditi s stoticami (*slika 6*). K ostanku tisočic pripišemo še stotice našega števila. Tako dobimo skupaj 27 stotic. Ker za kvadrat med obema pravokotnikoma potrebujemo 9 stotic, lahko ta prostor zapolnimo. S tem smo zaključili drugi popolni kvadrat ter potrdimo, da je število 3 na drugem mestu naše rešitve (*slika 8*).




Slika 8: *2. sklop iskanja rešitve*

Sedaj bomo poiskali možno tretje število (enice) naše rešitve. Tudi tokrat bomo gradili pravokotnika iz preostalih 18 stotic in širine, ki je enaka prvemu kvadratu 2 (*slika 6*). Dolžina teh pravokotnikov bo predstavljala potencialno tretje število naše rešitve.

Največja dolžina pravokotnika je 18 : 2 : 2 = 4,5 ≈ 4

Število 4 predstavlja naše izhodišče za tretje število naše rešitve. Za izgradnjo pravokotnikov smo porabili 16 stotic (2 pravokotnika x 2 x 4). Ostali sta nam dve stotici. Stoticama pripišemo 5 desetic našega števila, tako imamo 25 desetic. V pomožnem kvadratu vidimo, da moramo za popoln kvadrat tokrat zgraditi dva pravokotnika, ki rasteta na stranicah kvadrata, zgrajenega iz stotic, in imata dolžino tretjega števila. Za njuno gradnjo porabimo 24 desetic (2 pravokotnika x 3 x 4). Ostane nam ena desetica, ki ji pripišemo 6 enic našega števila. S temi enicami moramo v skladu s pomožnim kvadratom zapolniti prostor med obema pravokotnikoma, zgrajenima iz desetic (kvadrat). Zanj pa potrebujemo 16 enic (4 x 4). Ker ta kvadrat lahko izgradimo s preostalimi enicami, bomo tako dokončno izgradili tudi popoln kvadrat, katerega dolžina stranice je 234. To pa je tudi rešitev $\sqrt{54756}$ (*slika 9*).

$\sqrt{54756} = \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}$

-4

14

-12

27

-9

18

-16

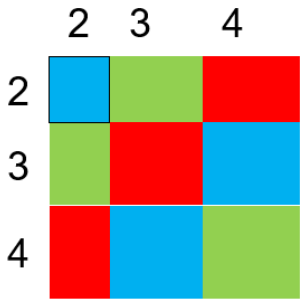
25

-24

16

-16

0



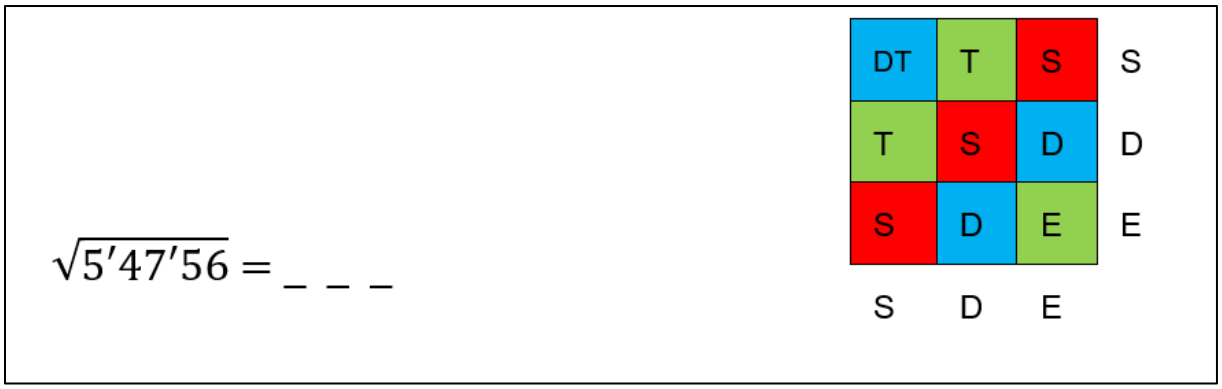

Slika 9: *3. sklop iskanja rešitve*

### 3.3.2. Razdelitvena metoda

V praksi se bolj uporablja razdelitvena metoda, po kateri se nekateri koraki znotraj enega sklopa po metodi montessori združijo. Ta način je opisal Aryabhata konec 5 stol. n. št. (Bailey in Borwen, 4). Tudi pri tem načinu ostajamo zvesti dvema že omenjenima izhodiščema.

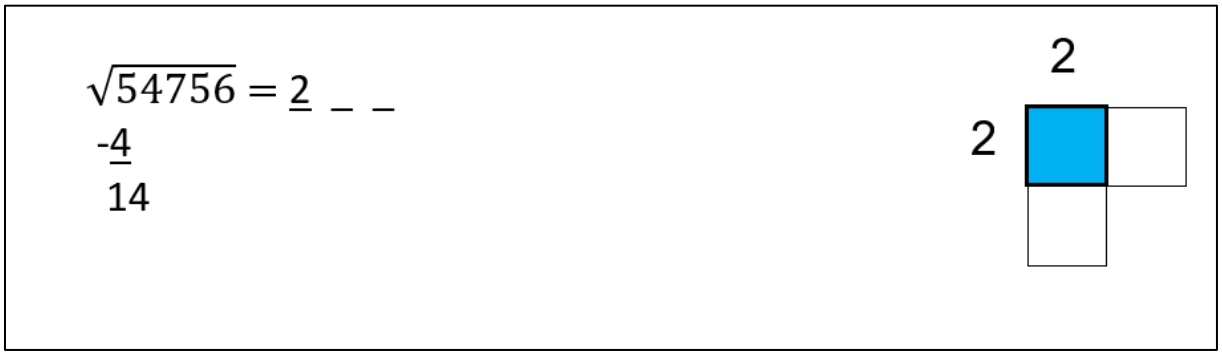
1. Kvadrat, ki ga gradimo, je vedno največji možni.
2. Ob koncu mora biti kvadrat popoln.

Tudi tokrat vzamemo za pomoč pri predstavitvi izračuna kvadratnega korena število 54756. Po že opisanem tudi tokrat predvidimo, koliko mest bo predvidoma zavzela rešitev (3) in temu primerno izberemo pomožni kvadrat, ki nam bo pomagal pri računanju (trinom kvadrata) (*slika 10*).




Slika 10: *Pomožni kvadrat*

Z gradnjo popolnega kvadrata iz števila 54756 začnemo tako, da sestavimo največji možni popolni kvadrat s številom najvišje kategorije, ki jo najdemo v pomožnem kvadratu. V našem primeru so to desettisočice. Ker imamo v našem številu (54756) 5 desettisočic, lahko z njimi zgradimo popoln kvadrat s stranico 2. Ker smo uspeli zgraditi popoln kvadrat, število 2 potrdimo kot rešitev prvega mesta (stotice) pri izračunu korena števila. Za izgradnjo prvega kvadrata smo porabili 4 desettisočice, ostala nam je ena desettisočica, ki jo bomo uporabili pri nadaljnji izgradnji našega kvadrata (*slika 11*).




Slika 11: *1. sklop iskanja rešitve*

Z gradnjo kvadrata nadaljujemo tako, da poiščemo drugo število (desetice). Ostanku desettisočic pripišemo število tisočic iz našega števila. Tako dobimo 14 tisočic, s pomočjo katerih začnemo v skladu s pomožnim kvadratom graditi dva pravokotnika, ki

rasteta iz stranic popolnega kvadrata desettisočic. Ker pravokotnika rasteta na stranicah že izgrajenega kvadrata, imata širino 2.

Največja dolžina pravokotnika je 14 : 2 : 2 = 3,5 ≈ 3

Vsak izmed pravokotnikov je lahko dolg največ 3 enote. Tokrat bomo preverili pravilnost domneve tako, da bomo predvideno rešitev (23) kvadrirali in tako zgradili popoln kvadrat. Dobimo število 529. Število, s katerim smo zgradili popoln kvadrat, odštejemo od prvih dveh odsekov podanega števila (54756) 547. V primeru, da je razlika pozitivna ali 0, je predvidena delna rešitev potrjena, saj smo zgradili popolni kvadrat:

$$547 - 529 = 18$$

Razlika je pozitivna, kar pomeni, da je delna rešitev 23 potrjena (*slika 12*).

Slika 12: *2. sklop iskanja rešitve*

Možno tretje število naše rešitve bomo iskali tako, da bomo iz ostanka stotic in pripisanih desetic gradili pravokotnika na stranicah popolnega kvadrata. Tokrat je širina pravokotnikov sestavljena iz dveh kategorij, saj je tudi naš popoln kvadrat sedaj sestavljen iz dveh kategorij. Največja možna dolžina pravokotnikov, ki ju bomo tako dobili, nam bo predstavljala možno tretje število naše rešitve. V našem primeru je ostalo 18 stotic, ki jim pripišemo 5 desetic.

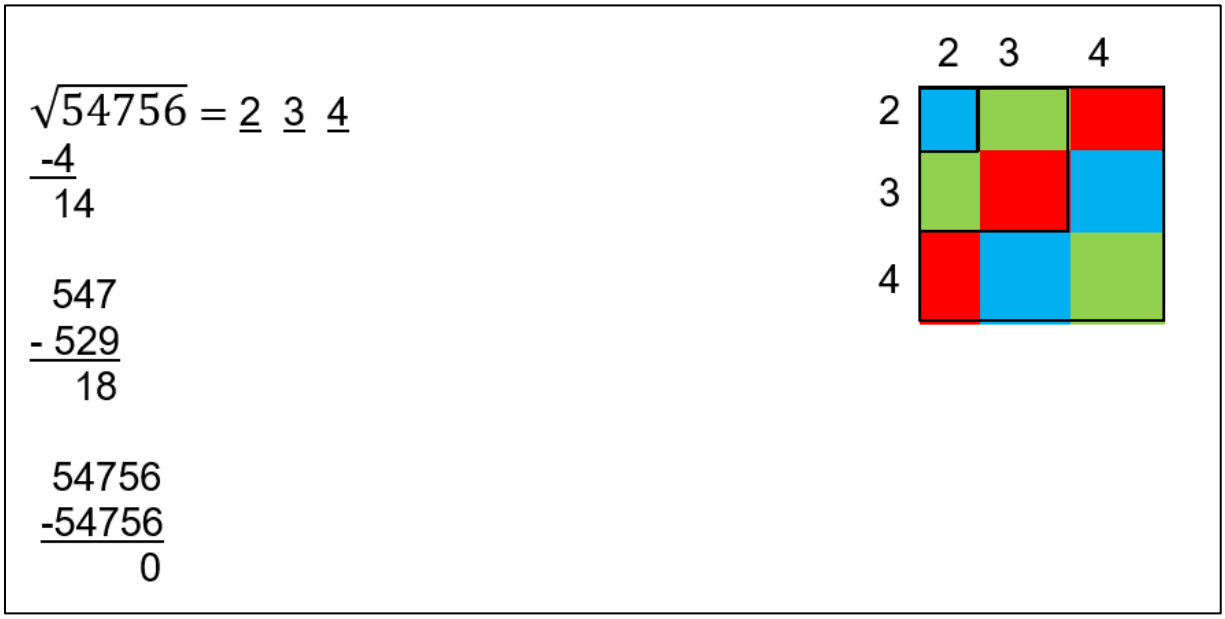
Največja dolžina pravokotnika je 185 : 2 : 23 = 4,02 ≈ 4

Tako bo število 4 naše izhodišče za tretje število rešitve. Pravilnost domneve bomo potrdili tako, da bomo predvideno rešitev (234) kvadrirali in tako zgradili popoln kvadrat. Dobimo število 54756. Kvadrat števila bomo odšteli od podanega števila 54756. V primeru, da je število pozitivno ali 0, je predvidena rešitev potrjena:

$$54756 - 54756 = 0$$

Razlika je enaka 0, kar pomeni, da je rešitev 234 potrjena (*slika 13*). Torej velja, da je

$$\sqrt{54756} = 234$$




Slika 13: *3. sklop iskanja rešitve*

# 4. Rezultati

Primerjavo vseh treh opisanih metod sva izvedli na dva načina, in sicer s teoretičnega vidika in s primerjavo števila potrebnih operacij s poudarkom na številu deljenj. Pri tem nama je bil v pomoč tudi MS Excel program (priloga 4).

## 4.1. Teoretični pogled

Kot sva uspeli ugotoviti, temelji babilonska metoda na principu, da iz dobljenega približka izračunamo nov, boljši približek. S tem nadaljujemo toliko časa, dokler ne dosežemo, da se vrednosti izračunanih približkov ponavljajo do predvidenega števila decimalnih mest.

Metoda montessori ter razdelitvena metoda pa temeljita na iskanju najbližjega popolnega kvadrata. Tudi tukaj dobivamo vedno boljše približke vrednosti korena, vendar je pot do rešitve drugačna.

## 4.2. Primerjava števila operacij in števila deljenj

V spodnji tabeli (*tabela 1*) je zbrano število računskih operacij pri računanju iskanega približka kvadratnega korena iz danih primerov.

| število | koren števila | babilonska metoda | | | metoda montessori | | razdelitvena metoda | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | prvi približek | št. rač. operacij | število deljenj | št. rač. operacij | število deljenj | št. rač. operacij | število deljenj |
| 5555449 | 2357 | 2000 | 12 | 6 | 20 | - | 8 | - |
| 54756 | 230 | 200 | 16 | 8 | 12 | - | 6 | - |
| 127449 | 357 | 350 | 16 | 8 | 22 | - | 6 | - |
| 622521 | 789 | 700 | 12 | 6 | 16 | - | 6 | - |
| 67 | 8,18 | 8 | 8 | 4 | 12 | - | 6 | - |
| 3136 | 56 | 50 | 16 | 8 | 6 | - | 4 | - |

Tabela 1: *Primerjava števila korakov pri danih konkretnih primerih*

Iz tabele je razvidno, da metoda montessori zahteva precej več računskih operacij kot razdelitvena in babilonska metoda. Pri razdelitveni metodi, v kateri je združenih nekaj korakov po metodi montessori, je zato potrebnih tudi manj računskih operacij.

Ugotovili sva, da je bistvena razlika v številu potrebnih deljenj. Med osnovnimi operacijami je deljenje tisto, ki zahteva največ časa in pozornosti. Pri metodi montessori in razdelitveni metodi ni potrebno izvesti nobenega deljenja (razen nekaj ocen). Pri babilonski metodi pa je treba pri izračunu vsakega novega približka izvesti dve deljenji. V našem primeru moramo pri izračunu korena iz 53756 med drugim izračunati tudi 6 deljenj.

Ugotovili sva tudi, da se v primeru, ko rezultat zahteva večmestno vrednost, se število korakov pri metodi po montessori poveča, medtem ko pri babilonski metodi ostane enako. Prav tako pa sam postopek reševanja pri metodi po montessori, kljub temu, da so računske operacije relativno enostavne, zahteva večjo zbranost pri poteku posameznih korakov računanja.

Tako lahko ugotoviva, da je metoda po montessori primernejša za »peš« računanje, še posebej v primerih, ko je rezultat dvo- ali tromesten.

Pri večmestnem rezultatu se število korakov pri metodi po montessori poveča, hkrati pa se poveča tudi zahteva po zbranosti pri izračunavanju. V teh primerih pa je računanje korena po babilonski metodi primernejše.

# 5. Zaključki

Primerjava babilonske metode, metode montessori in razdelitvene metode računanja kvadratnega korena je pokazala, da se v teoretičnem smislu princip računanja po babilonski metodi bistveno razlikuje od računanja korena po metodi montessori in razdelitveni metodi.

S praktičnega vidika pa babilonska metoda zahteva manj računskih operacij, a vsebuje veliko deljenja, kar je za »peš« računanje neugodno.

Na osnovi teh ugotovitev zaključujeva, da se babilonska metoda bistveno razlikuje od metode montessori in razdelitvene metode. Tega pa ne moreva trditi, ko primerjava metodo montessori in razdelitveno metodo. V času raziskave se je izkazalo, da je razdelitvena metoda poenostavljena izvedba metode montessori. S tem delno potrjujeva hipotezo.

Za samo praktično uporabo priporočava metodo montessori ali razdelitveno metodo, zlasti v primerih, ko cilj izračuna nima prevelikega števila decimalnih mest. Pri večjem številu decimalnih mest pa so vse tri metode z računskega vidika časovno zahtevne.

Zanimivo bi bilo ugotoviti, katero metodo uporabljajo žepni računalniki za izračun kvadratnega korena. Prav tako bi bilo zanimivo izvedeti, kako so Babilonci računali kubični koren, ter to primerjati z metodo montessori ali razdelitveno metodo.

# 6. Viri in literatura


Babilonska matematika (Algebra). (2019). Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Babilonska_matematika, dne 20. 2 .2021.

Bailey, D. P., Borwen J. M. (2012). Ancient Indian Square Roots: An Exercise in Forensic Paleo-Mathematics. Dostopno na spletnem naslovu: https://www.researchgate.net/publication/261845005_Ancient_Indian_Square_Roots_An_Exercise_in_Forensic_Paleo-Mathematics, dne 20. 1. 2021.

Dockrill, P. (2019). Math Genius Has Devised a Wildly Simple New Way to Solve Quadratic Equations. Dostopno na naslovu: https://www.sciencealert.com/math-genius-finally-discovers-easy-way-to-solve-quadratic-equations-after-4-000-years, dne 18.1.2021

Flores A. (2014). The Babylonian Method for Approximating Square Roots: Why Is It So Efficient?. The Mathematics Teacher, 108 (3), 230 - 235. Dostopno na spletnem naslovu: https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.108.3.0230, dne 20. 1. 2021.

Fowler, D. in Robson, E. (1998). Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Contex. HISTORIA MATHEMATICA, 25, 366 - 378. Dostopno na spletnem naslovu: https://www.sciencedirect.com/journal/historia-mathematica/vol/25/issue/4, dne 20. 1. 2021.

Gersham, J. The Babylonian Method and its properties, pdf. Dostopno na spletnem naslovu: https://mathcirclesofchicago.org/wp-content/uploads/2015/08/johnson.pdf, 20. 1. 2021.

Hladnik, M. (2013). ZGODOVINA MATEMATIKE, Zapiski predavanj 2012/13. Dostopno na spletnem naslovu: https://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/EgiptBabZapiskiZMA.pdf, dne 20. 1. 2021.

Jerman, M.(2015). Kako so Babilonci računali kvadratne korene. Presek, 43 (3).

Loh, Po-Shen. (2019). A Simple Proof of the Quadratic Formula. Dostopno na spletnem naslovu: https://arxiv.org/abs/1910.06709, dne 23. 2. 2021.

Montessori, M. (2016). Psychoaritmetic. Montessori-Pierson Publishing Company, Amsterdam.

Nemet, V. (2016). Koncept zaporedja skozi zgodovino (Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana). Dostopno na spletnem naslovu: https://core.ac.uk/download/pdf/79462662.pdf, dne 20. 1. 2021.

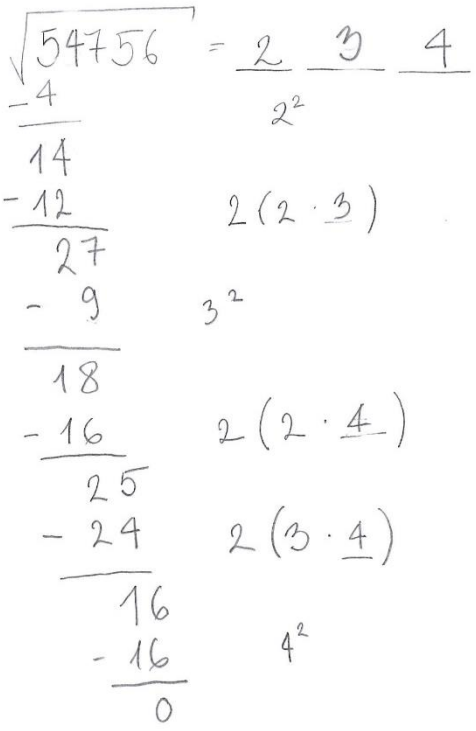
Pavlič, G. in drugi. (2012). Planum, Matematika za gimnazije. Učbenik. Ljubljana: Modrijan.

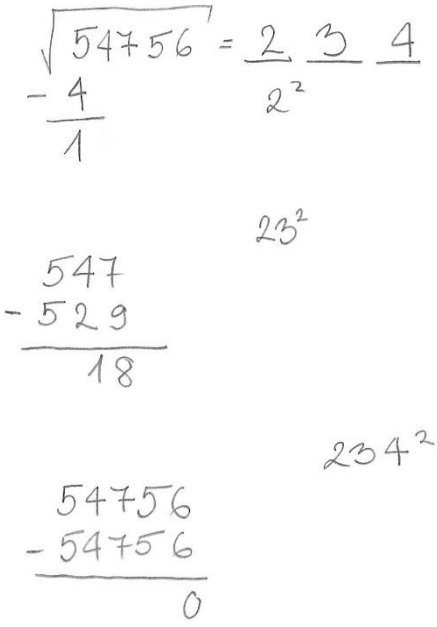
Pollard, M. (1997). Maria Montessori, Mohorjeva družba, Celje.

Wikipedia. Babylonial numerals. Dostopno na spletnem naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_cuneiform_numerals#/media/File:Babylonian_numerals.svg) , dne: 19. 2. 2021.

# 7. Priloge

Priloga 1: Izračun po metodi montessori



Priloga 2: Izračun po babilonski metodi

$\sqrt{54756} =$

$S = 54756$

$X_1 = 200$

$$\frac{\frac{S}{X_1} + X_1}{2} = \frac{\frac{54756}{200} + 200}{2} = \frac{273,78 + 200}{2} = \frac{473,78}{2} =$$

$= 236,89$

$X_2 = 236,89$

$$\frac{\frac{S}{X_2} + X_2}{2} = \frac{\frac{54756}{236,89} + 236,89}{2} = \frac{231,14 + 236,89}{2} =$$

$$= \frac{468,03}{2} = 234,01$$

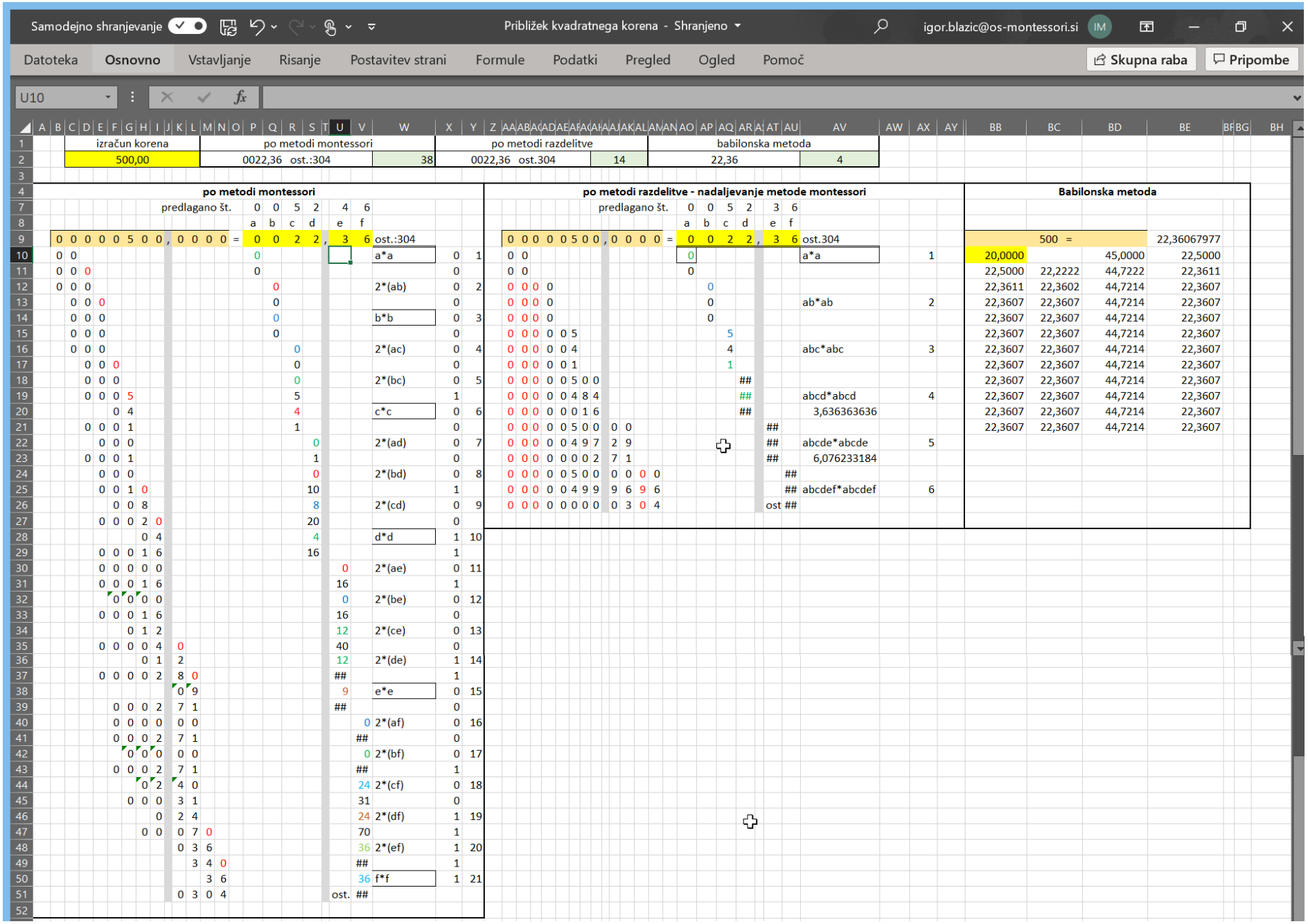
$X_3 = 234,01$

$$\frac{\frac{S}{X_3} + X_3}{2} = \frac{\frac{54756}{234,01} + 234,01}{2} = \frac{233,99 + 234,01}{2} =$$

$$= \frac{468}{2} = 234$$

$X_4 = 234$

Priloga 3: Primer izračuna s pomočjo Excel programa



Priloga 4: Primer izračuna s pomočjo Excel programa

| število | koren števila | babilonska metoda | | | metoda montessori | | razdelitvena metoda | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | prvi približek | št. rač. operacij | število deljenj | št. rač. operacij | število deljenj | št. rač. operacij | število deljenj |
| 326280,8641 | 571,21 | 500 | 16 | 8 | 30 | | 10 | |
| 127584,6961 | 357,19 | 300 | 16 | 8 | 40 | | 12 | |
| 2718, 5796 | 52,14 | 50 | 12 | 6 | 20 | | 8 | |
| 984,7044 | 31,38 | 30 | 12 | 6 | 20 | | 8 | |
| 10,5625 | 3,25 | 3 | 12 | 6 | 12 | | 6 | |
| 18,3184 | 4,28 | 4 | 12 | 6 | 12 | | 6 | |
| 710649 | 843 | 800 | 12 | 6 | 12 | | 6 | |
| 4624 | 68 | 60 | 16 | 8 | 6 | | 4 | |
| 0,6724 | 0,82 | 0,8 | 8 | 4 | 6 | | 4 | |